第三章 球面三角微分关系式

第四章 球面角盈及球面三角形面积

第五章 球面內切圓及球面外接圓

第六章 球面曲綫

序　言

本教材是作者根据几年来在航海專業教学上的經驗，并参考以下著作：

1)球面三角术	李光蔭著
2)Сферическая Тригонометрия	Ф. Ф. Павлов, В. П. Машкевич
球面三角学	刘亞星譯
3)Сферическая Тригонометрия	Проф. М. К. Вентцель
4)Plane and Spherical Trigonometry	H. B. Goodwin, M. A.
5)Plane and Sphuical Trigonometry	H. T. Muhly, Ph. D., S. S. Saslaw, Ph. D.

將旧編的講义加以修改而写成的。

在这教材中，对所有的公式，都予以詳細証明，而对一般性的叙述，則保量精簡。在解球面三角形时，特别强調必須依照航海習慣所采用的計算順序和数据排列格式。教材的內容，較一般的球面三角学增加了球面曲綫及球面三角微分关系式等部分，这对于研究新式無綫电助航定位理論，及定位誤差是必要的。

本教材对于航空、測量、制圖、天文等專業，也是有用的。

在編写的过程中，大連海运学院航海学教研組及航海技术研究組曾給予了充分协助，并提供了改进意見。謹向他們致以深深的謝意。

初稿問世，謬誤在所难免，尚祈讀者惠予批評和指正。

作　者

第一章　球　面　几　何

§1.　球面基本概念

1.1　球、球面

半圓周繞直徑旋轉而成的旋轉面叫作**球面**。球面所包圍的几何体叫作**球**。**球心**是球体中間的一个定点，由这定点到球面任何一点的直綫距离相等。球心到球面的直綫距离叫作球的**半徑**；同一球体的半徑相等。經过球心而兩端为球面所截的直綫叫作球的**直徑**；直徑为半徑的兩倍，同一球体的直徑自亦相等。

1.2　球面上的圓

任意平面截于球面的截痕是一个圓。經过球心的平面所截的圓叫作**大圓**；不經球心的平面所截的圓叫作**小圓**。

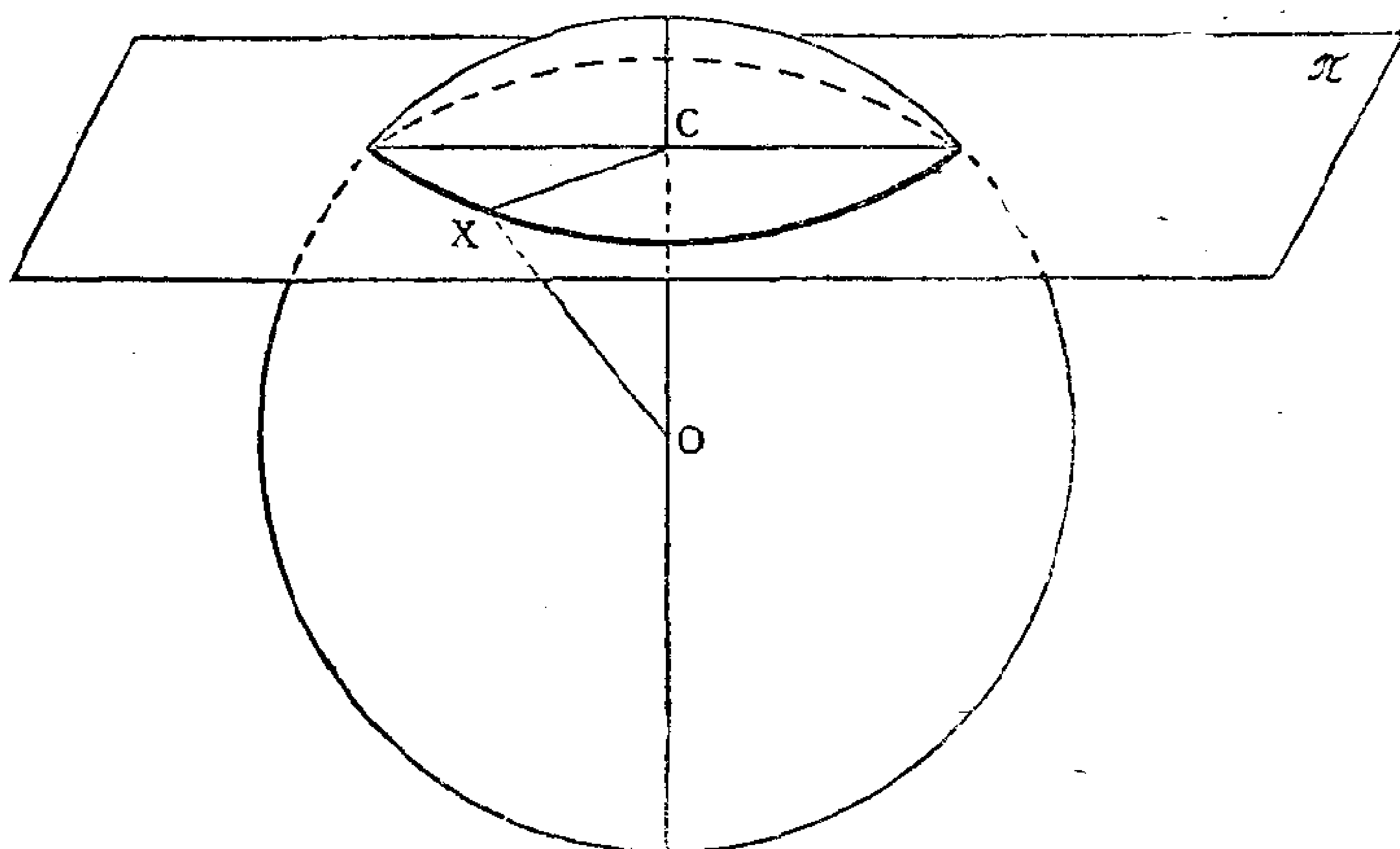


圖 1

設 x 为平面 π 所截的球面截痕上一个任意点(圖 1)。由球心 o 作 oc

垂直于平面 π 并交于 c，連 ox 及 cx，則 $\widehat{ocx}$ 为直角，Δocx 为直角三角形。$cx=\sqrt{ox^2-oc^2}$。从这个式中，可以看到，不論 x 在截痕上任何位置，对于平面 π 而言，oc 是一个定値，而 ox 为球的半徑，亦是一个定値。所以截痕上任何点到 c 的距离恒等。由此，根据圓的几何定义，可以断定截痕是一个圓，c 是它的中心，cx 是它的半徑。

大圓平面經过球心，这时由球心到平面的垂綫 oc 等于零，因而大圓的半徑与球的半徑相等，球心即大圓的中心；对于不經过球心的小圓平面，oc 恒大于零，因而 $cx<ox$，即小圓的半徑恒小于球的半徑。

經过球面上不在直徑兩端的二点，仅能作一个大圓，因为不在直徑兩端的二点仅能作一个平面經过球心。連球面上兩点的大圓弧長叫作这二点間的**球面距离**。航海以浬作为計算距离的單位，所謂一浬即是1′球心角所对的球面大圓弧長。

兩个大圓平面的交綫是球的直徑，也是这兩个大圓的直徑。因为大圓平面必須經过球心，所以球心既在一个大圓的面上，又在另个大圓的面上。只有平面交綫上的点才能同时在相交的平面上，所以球心是大圓平面交綫上的一个点，或者說大圓平面的交綫經过球心。大圓平面的交綫是經过球心的直綫，又为球面所截，因而是球的直徑。又因球心即是大圓平面的中心，大圓平面的交綫是大圓平面上經过大圓中心的直綫，綫的兩端抵于大圓的周，因此大圓平面的交綫，又是大圓的直徑。

1.3 軸、極、極距、極綫

垂直于圓面的球直徑，叫作这个圓的**軸**。軸的端叫作圓的**極**。由極到圓的球面距离叫作**極距**；同一圓的極距相等。圖 2，球直徑 PP_0 垂直于以 c 为中心的圓平面，所以 PP_0 是这个圓的軸，P 和 P_0 是它的極，極 P 或 P_0 到圓上各点 $a.b$ 的球面距离，是由極到各該点的極距。極距 $\overset{\frown}{Pa}$、$\overset{\frown}{Pb}$ 相等。極距为 90° 的圓弧，又叫作該極的**極綫**。圖 2，$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=90°$，$\overset{\frown}{AB}$ 为 P 的極綫。大圓，只有大圓，距它的極为90°，所以，大圓弧是它的極的極綫；反之，極的極綫必須是大圓弧。

1.4 球面角、球面角的度量

球面上由兩个大圓弧構成的角叫作**球面角**。構成球面角的大圓弧叫

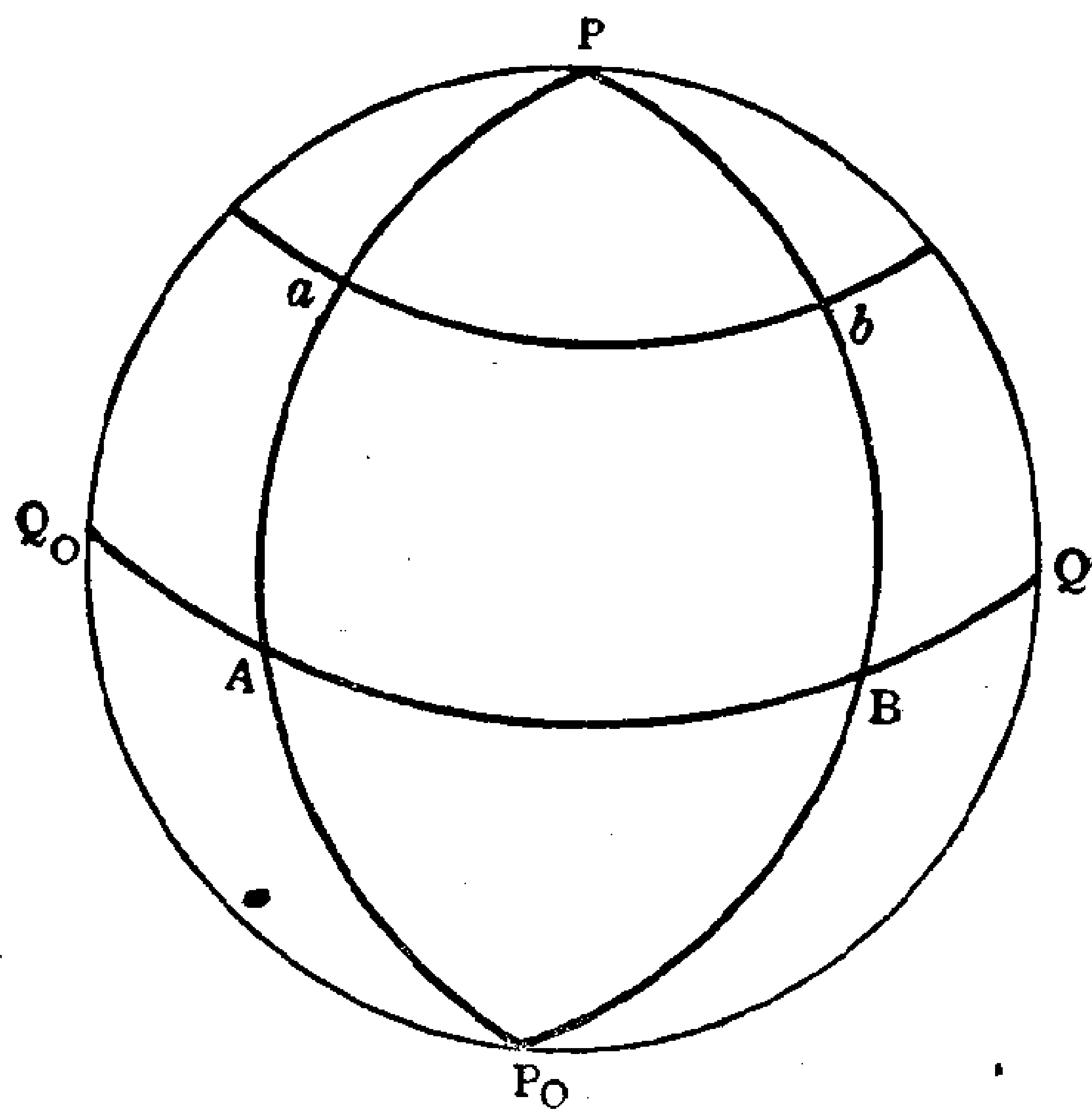


圖 2

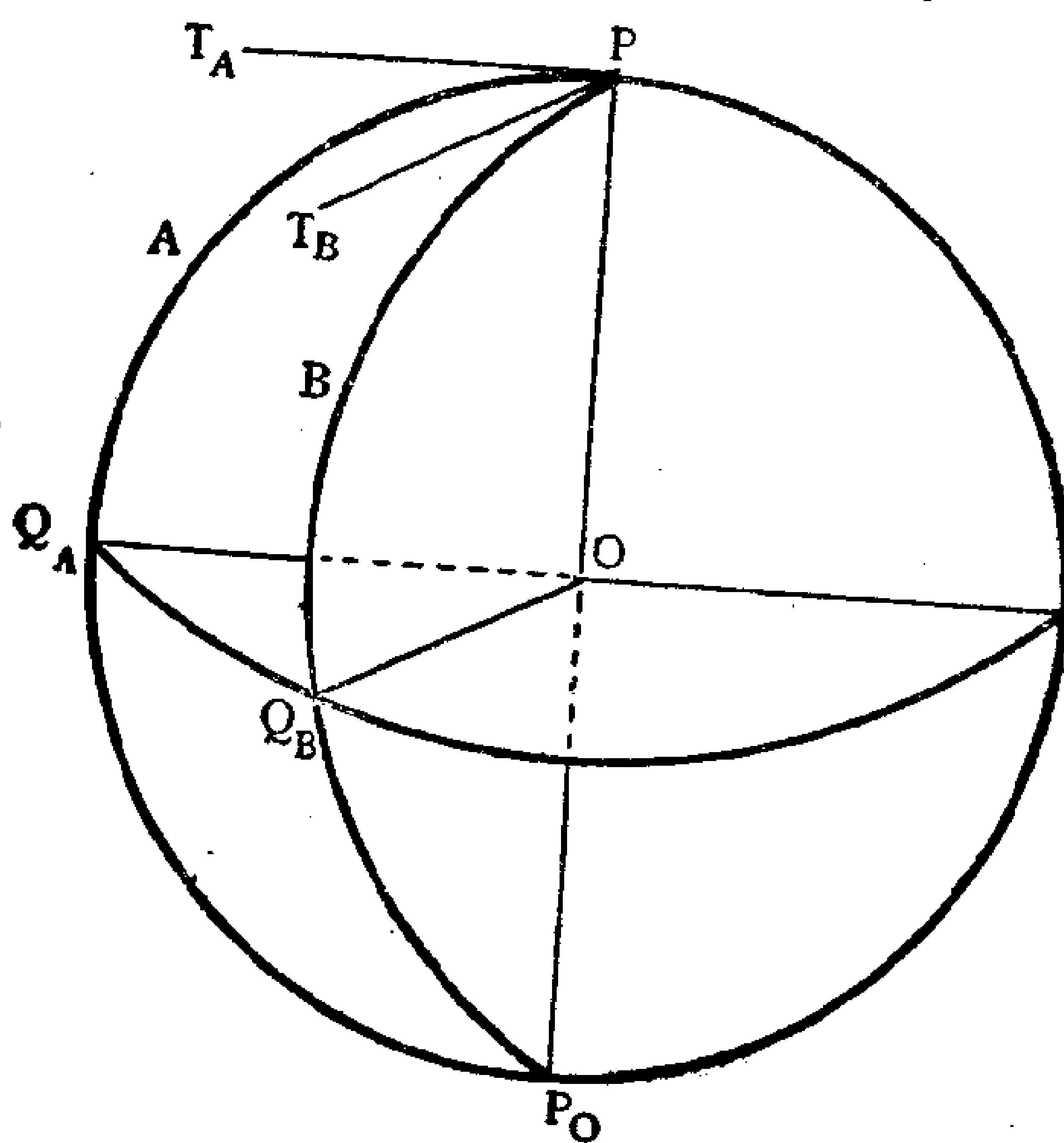


圖 3

作球面角的边，大圓弧的交点叫作該球面角的頂点。

圖 3，大圓弧 PAP_0、PBP_0 相交于 P 及 P_0，$A\widehat{P}B$ 或 $A\widehat{P_0}B$ 叫作球面角。P 是球面角 $A\widehat{P}B$ 的頂点，而 P_0 則是 $A\widehat{P_0}B$ 的頂点；大圓弧 $\widehat{PA}$、$\widehat{PB}$ 是 $A\widehat{P}B$ 的边，$\widehat{P_0A}$、$\widehat{P_0B}$ 是 $A\widehat{P_0}B$ 的边。

球面角有以下各种度量的方法：

a. 大圓平面所構成的二面角($A-PP_0-B$)；

b. 切于頂点的大圓弧切綫的夾角($T_A\widehat{P}T_B$)；

c. 頂点的極綫被大圓平面所截的弧段($\widehat{Q_AQ_B}$)，或該弧段所对的球心角($Q_A\widehat{O}Q_B$)。

§2. 球面三角形

2.1 球面三角形

球面上三个大圓弧所構成的三角形 ABC（圖 4a）叫作**球面三角形**。構成三角形的大圓弧叫作球面三角形的边。

一个三角形共有六个部分，即三个角及三个边，这些部分叫作球面三角形的**要素**。各要素均小于 180° 而大于 0° 的三角形叫作“欧勒”球面三角形；設有一个或一个以上的要素大于 180°，則三角形叫作“馬比阿斯——斯圖第”球面三角形。本教材所涉及的仅限于欧勒球面三角形。

球面三角形的頂点常用 A、B、C 标註，而 A、B、C 又分別表示各該点的角；各角所对的边則用 a、b、c 表示之。

对称于 A、B、C 各点的大圓弧所構成的另一个三角形 $A_0B_0C_0$（圖 4b）叫作球面三角形 ABC 的**对称三角形**。各对称部分相等，兩个三角形也相等。

球面三角形中凡有兩个边或兩个角相等，三角形叫作**球面等腰三角形**；三边或三角相等，叫作**球面等边三角形**；一个角为 90°，叫作**球面直角三角形**；一个边为 90°，叫作**球面直边三角形**；一个角及其所对边甚小，或三个边均甚小，叫作窄的或小的**球面初等三角形**；凡不具有上述条件的三角形，叫作**球面任意三角形**。球面三角形为上述各类三角形的統称，但經常則被用作球面任意三角形的簡称。

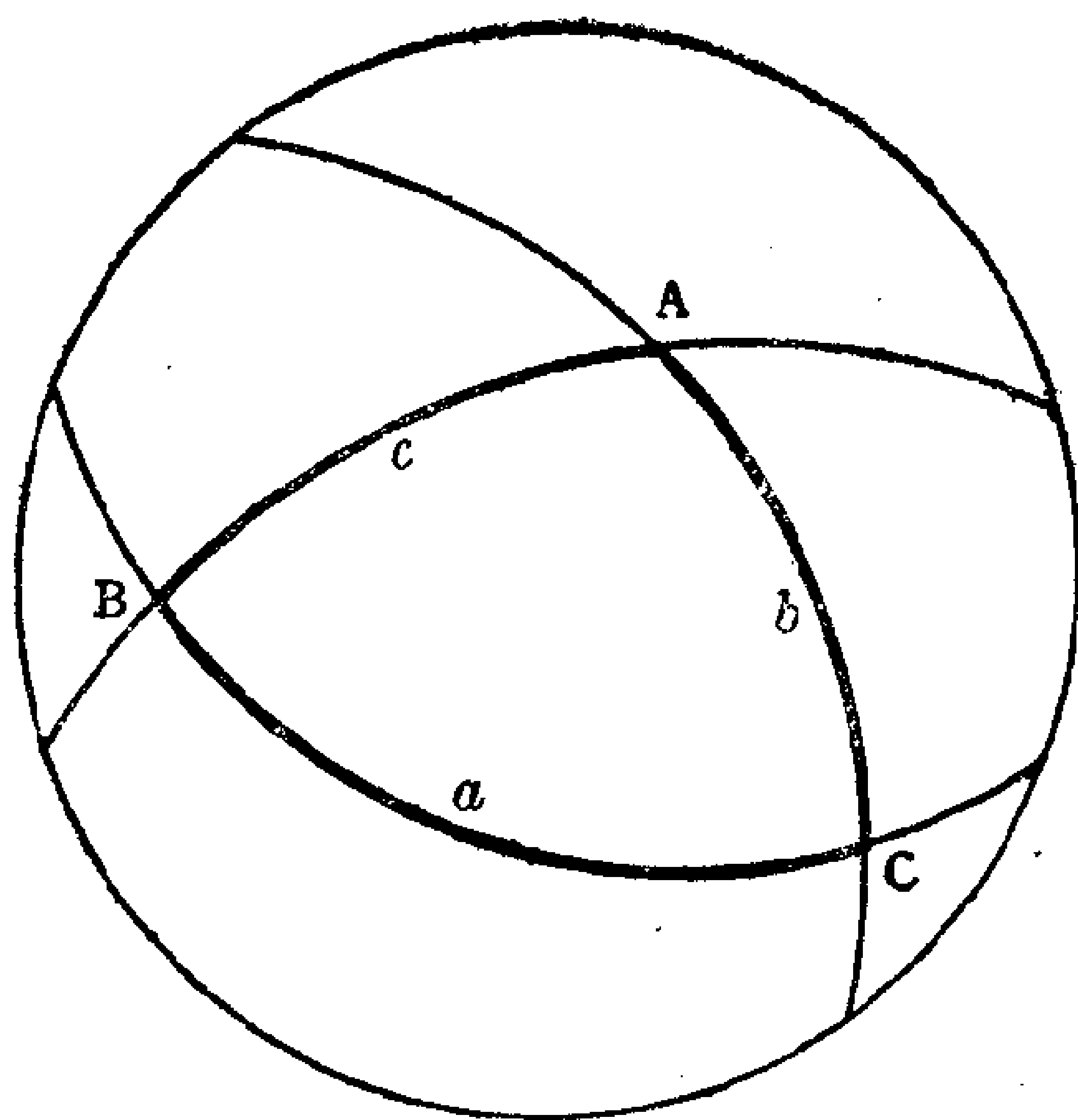


图 4a

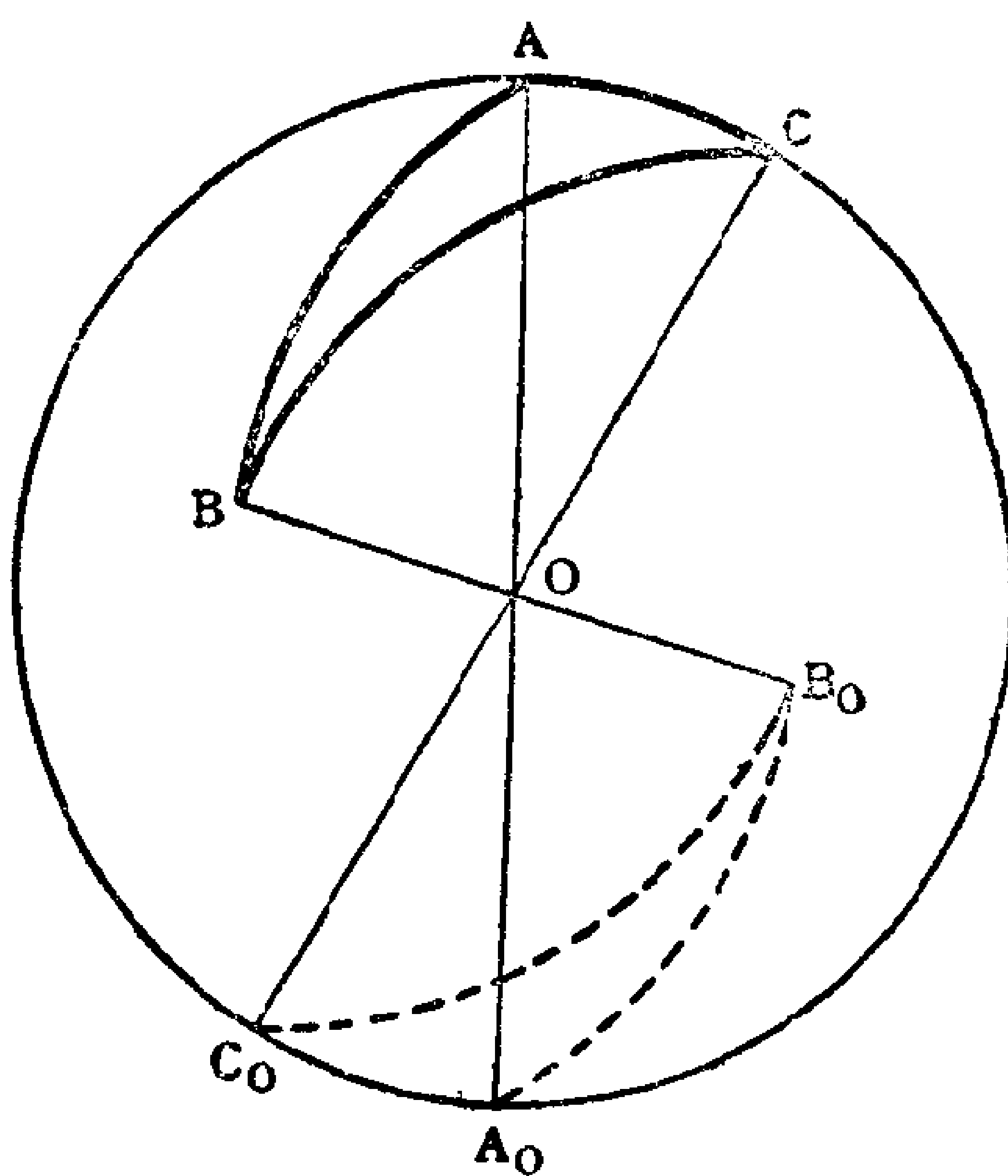


图 4b

2.2 極綫三角形

球面三角形頂点的極綫所構成的三角形，叫作該球面三角形的極綫三角形。極綫三角形的頂点常以 A'、B'、C' 标註，并用以表示各該頂点的角；a'、b'、c' 則分別表示各該角所对的边。A'、B'、C' 必需在 A、B、C 的同側(圖 5)。

球面三角形各边均小于 90°，則極綫三角形在原球面三角形之外；球面三角形各边均大于 90°，則極綫三角形在原球面三角形之內；球面三角形的一边或二边小于 90°，其余的边大于 90°，則極綫三角形与原球面三角形相交叉。

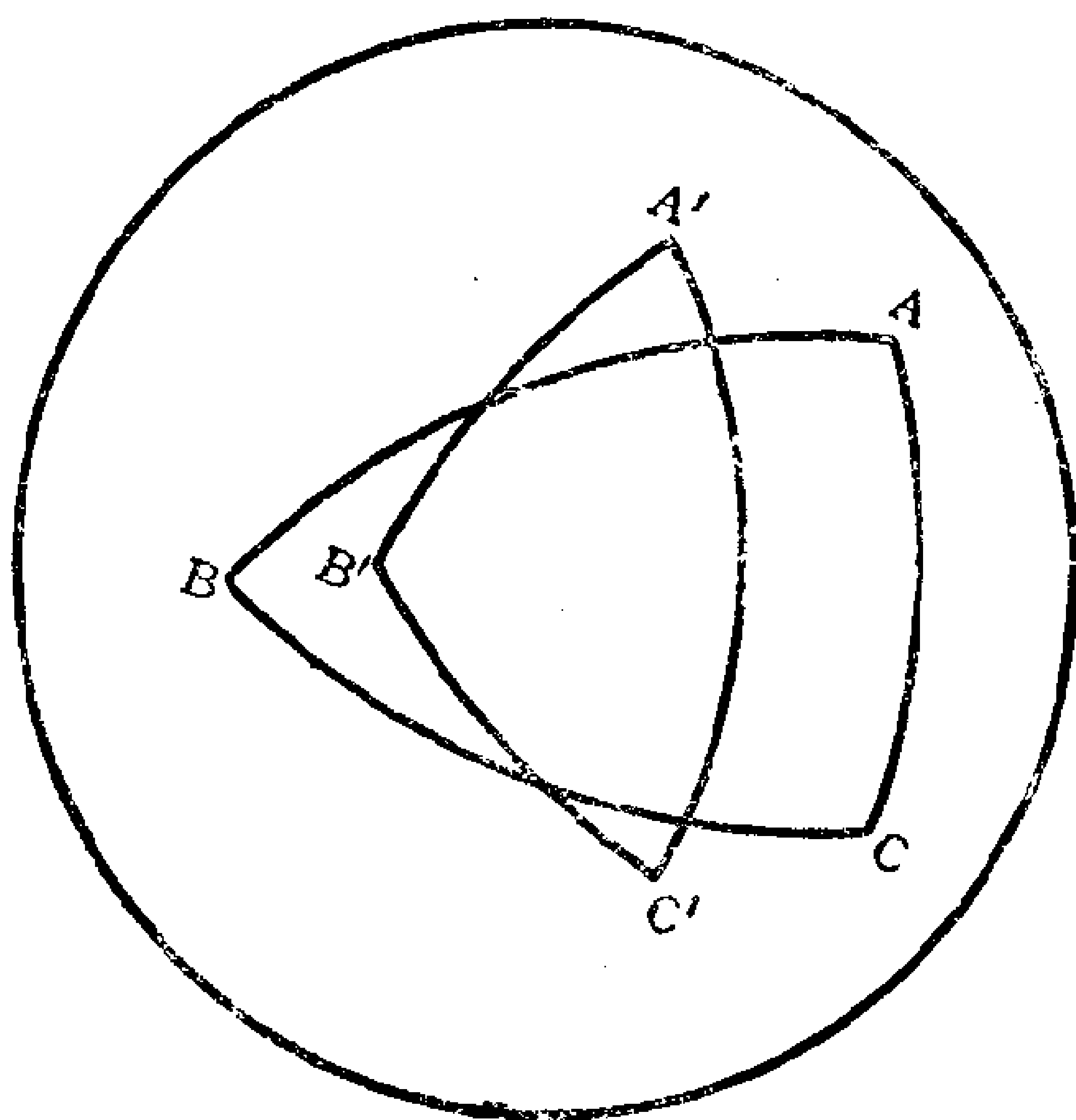


圖 5

2.3 球面三角形与其極綫三角形的关系

a. 球面三角形各頂点为其極綫三角形各对应边的極。

設 $A'B'C'$ 为球面三角形 ABC 的極綫三角形（圖 6），根据定义，a'、b'、c' 分別为 A、B、C 各頂点的極綫，頂点 A、B、C 分別为 a'、b'、c' 各边的極。

b. 極綫三角形各頂点为其原球面三角形各对应边的極。

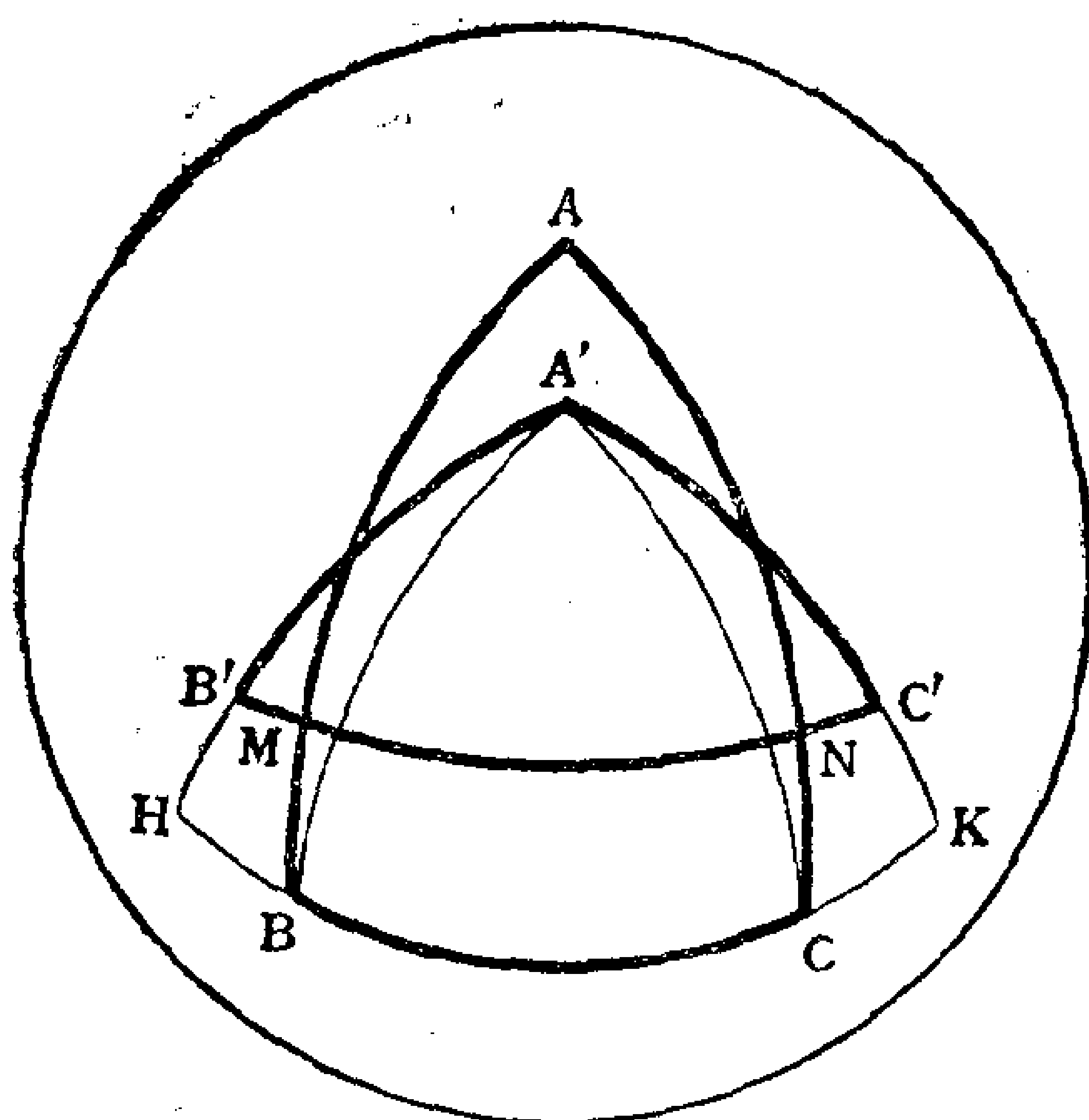


圖 6

由圖 6，已知 B 为 b' 的極，C 为 c' 的極，故 $\widehat{BA'}=90^\circ$，$\widehat{CA'}=90^\circ$。但球心角 $A'OB$ 及 $A'OC$ 可以分別用 $\widehat{BA'}$ 及 $\widehat{CA'}$ 度量，所以 $A'\hat{O}B=A'\hat{O}C=90^\circ$。今 $A'O$ 与 OB 及 OC 成为直角，故 $A'O$ 垂直于大圓 BC 的面。又因 $A'O$ 經过大圓 BC 的圓心 O_1 故 $A'O$ 为大圓 BC 的軸，A' 为大圓 BC 的極。同理可証 B' 为 $\widehat{AC}$ 的極，C' 为 $\widehat{AB}$ 的極。

c. **球面三角形的边(角)与其極綫三角形的角(边)互为补角。**即

$$a+A'=180^\circ \qquad b+B'=180^\circ \qquad c+C'=180^\circ$$

$$A+a'=180^\circ \qquad B+b'=180^\circ \qquad C+c'=180^\circ$$

在圖 6 延長 $\widehat{AB}$、$\widehat{AC}$ 交 $\widehat{B'C'}$ 于 M、N，并延長 $\widehat{BC}$ 交 $\widehat{A'B'}$、$\widehat{A'C'}$ 于 H、K

今 $$A'=\widehat{HK},$$

但 $$\widehat{HK}=\widehat{HC}+\widehat{CK}$$

$$=90^\circ+90^\circ-\widehat{BC}$$

$$=180^\circ-a。$$

故 $$a+A'=180^\circ。$$

同理 $$b+B'=180^\circ;$$

$$c+C'=180^\circ。$$

又 $$a'=\widehat{B'C'},$$

$$\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{B'N}+\overset{\frown}{NC'}$$
$$=90^\circ+90^\circ-\overset{\frown}{MN}$$
$$=180^\circ-A。$$

故 $$A+a'=180^\circ。$$

同理 $$B+b'=180^\circ;$$
$$C+c'=180^\circ。$$

2.4 球面三角形的性質

a.球面三角形的边是大圓弧。

b.球面三角形的每一边必大于 0° 而小于 180°，三边的和必大于 0° 而小于360°。球面三角形的边是以它們所对的球心角来度量，对球面三角形的三边的球心角則構成以球心为頂点的三面角；由立体几何已知三面角的各平面角的和大于 0° 而小于 360°，故球面三角形三个边的和必大于 0° 而小于 360°。

c.球面三角形任一边必小于其它二边的和而大于其它二边的差。因三面角的任一平面角必小于其宅兩个平面角的和而大于宅的差。

d.球面三角形的每一角必大于 0° 而小于 180°，三个角的和必大于 180° 而小于 540°。其超出 180° 的部分叫作球面角盈，通常用 E 表示之。即

$$E=A+B+C-180^\circ$$

已知球面三角形的三边的和大于 0° 而小于 360°，对于極綫三角形自亦

$$0^\circ<a'+b'+c'<360^\circ$$

但 $$a'+b'+c'=540^\circ-(A+B+C),$$

故 $$180^\circ<A+B+C<540^\circ$$

e.球面三角形的角不等，則不等角所对的边亦不等，大角必对大边，反之，大边必对大角。

首先証明大角必对大边。設球面三角形 ABC，$B>C$（圖 7）。在 B 取 $\overset{\frown}{DBC}=C$，并使 $\overset{\frown}{BD}$ 交 $\overset{\frown}{AD}$ 于 D，于是 DBC 为球面等腰三角形，$\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}$。但 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB}>\overset{\frown}{AB}$，代入得 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}>\overset{\frown}{AB}$，即 $\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{AB}$。

現在再反証大边必对大角。設 $b>c$，則 $180^\circ-B'>180^\circ-C'$，或 $B'<C'$，由上面的証明得 $b'<c'$，或 $180^\circ-B<180^\circ-C$，即 $B>C$。

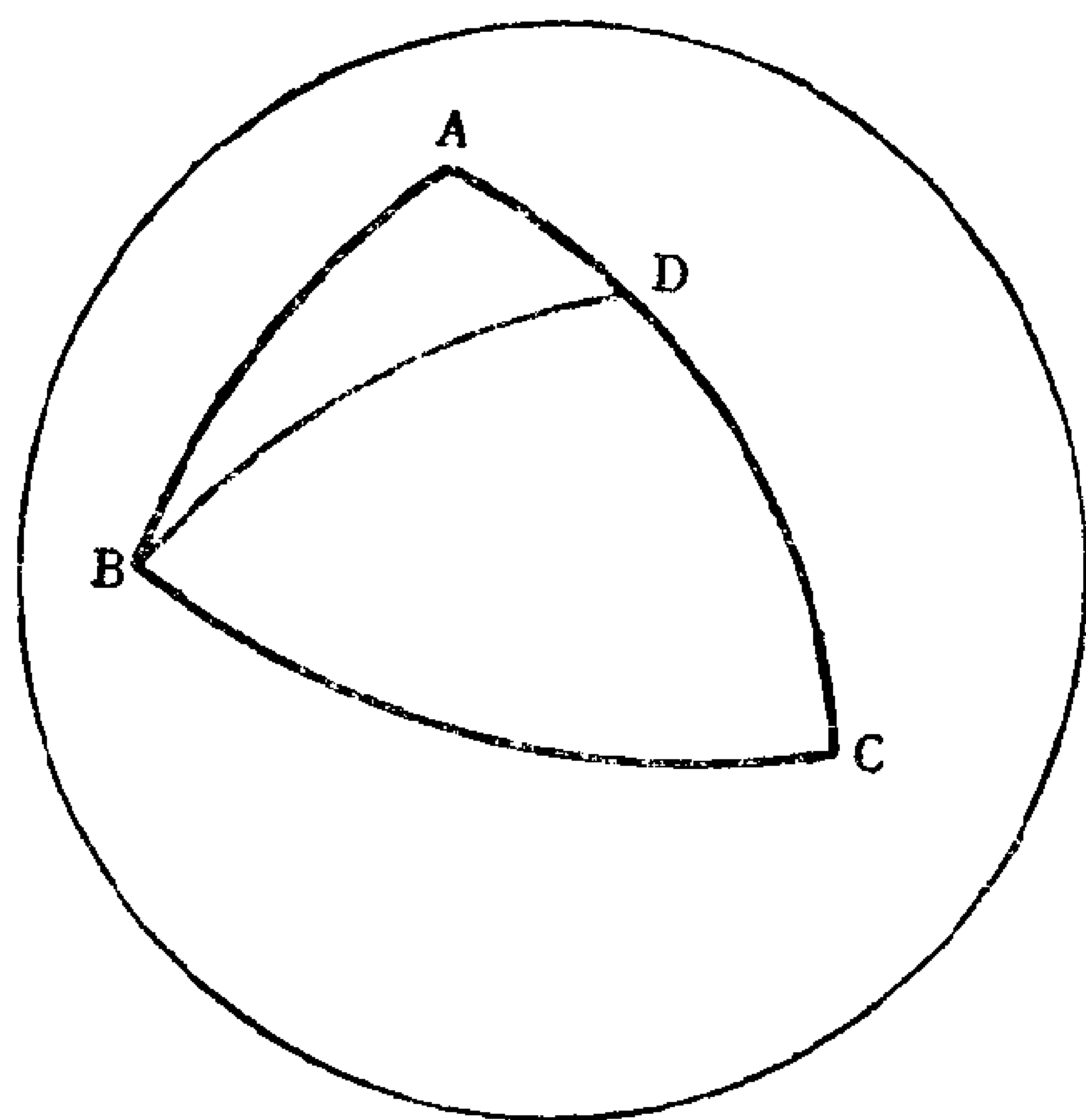


圖 7

§3. 球面三角形作圖

3.1 球面三角形作圖概念

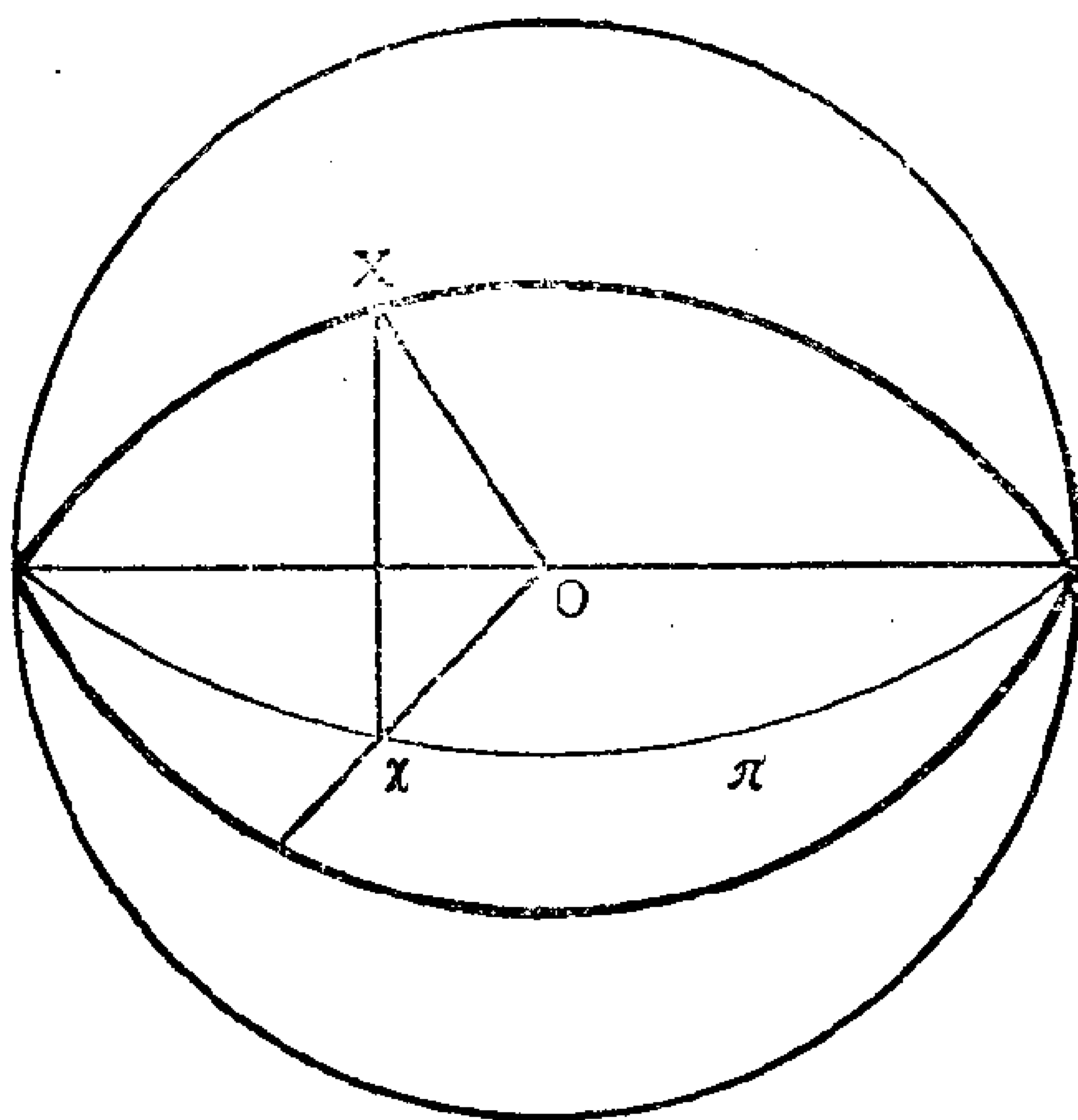


圖 8

球面三角形作圖，就其性質而論，是屬于透视投影；但由于作圖的目的，仅为在平面圖上画出球面三角形圖形，从而估計該三角形各要素間的关系，所以对于变形及精确度等問題，并不严格地計較。为了制圖簡便起見，一般是采用一种近似于正射投影作圖的理論及方法。由球面任意点 X 作 X_x 垂直到大圓平面 π，交 π 于 x，則 x 称为 X 在投影面 π 的正射投影(圖8)。当 X 在球面作弧形移动时，它的投影 x 亦在投影面作弧形移动，投影面上的弧形就是球面上弧形的投影。球面上圓弧的投影仍为弧形，只有圓弧的面与投影面成直角时，圓弧的投影成直綫。

3.2 基本作圖法

a. 已知圓的極的投影及極距，作圓的投影。

設圓的極的投影 P 在投影面圓周（圖 9），極距为 $\alpha°$。

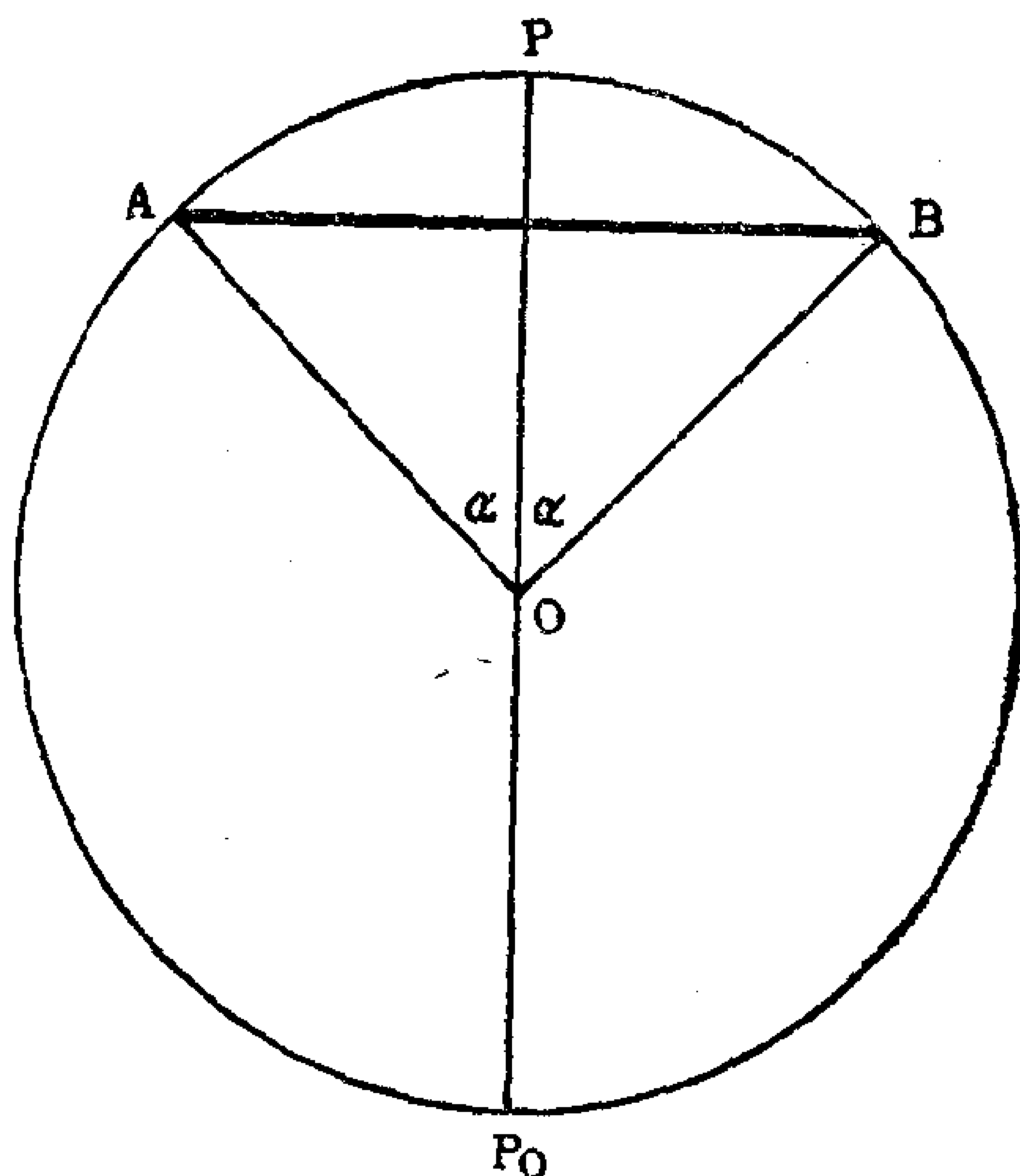


圖 9

(i)在投影面圓周取 A、B 二点，使 $P\widehat{O}A=P\widehat{O}B=\alpha°$；

(ii)連 AB，AB 为所求的圓投影。

設圓的極的投影 P 在投影面中心（圖 10）。

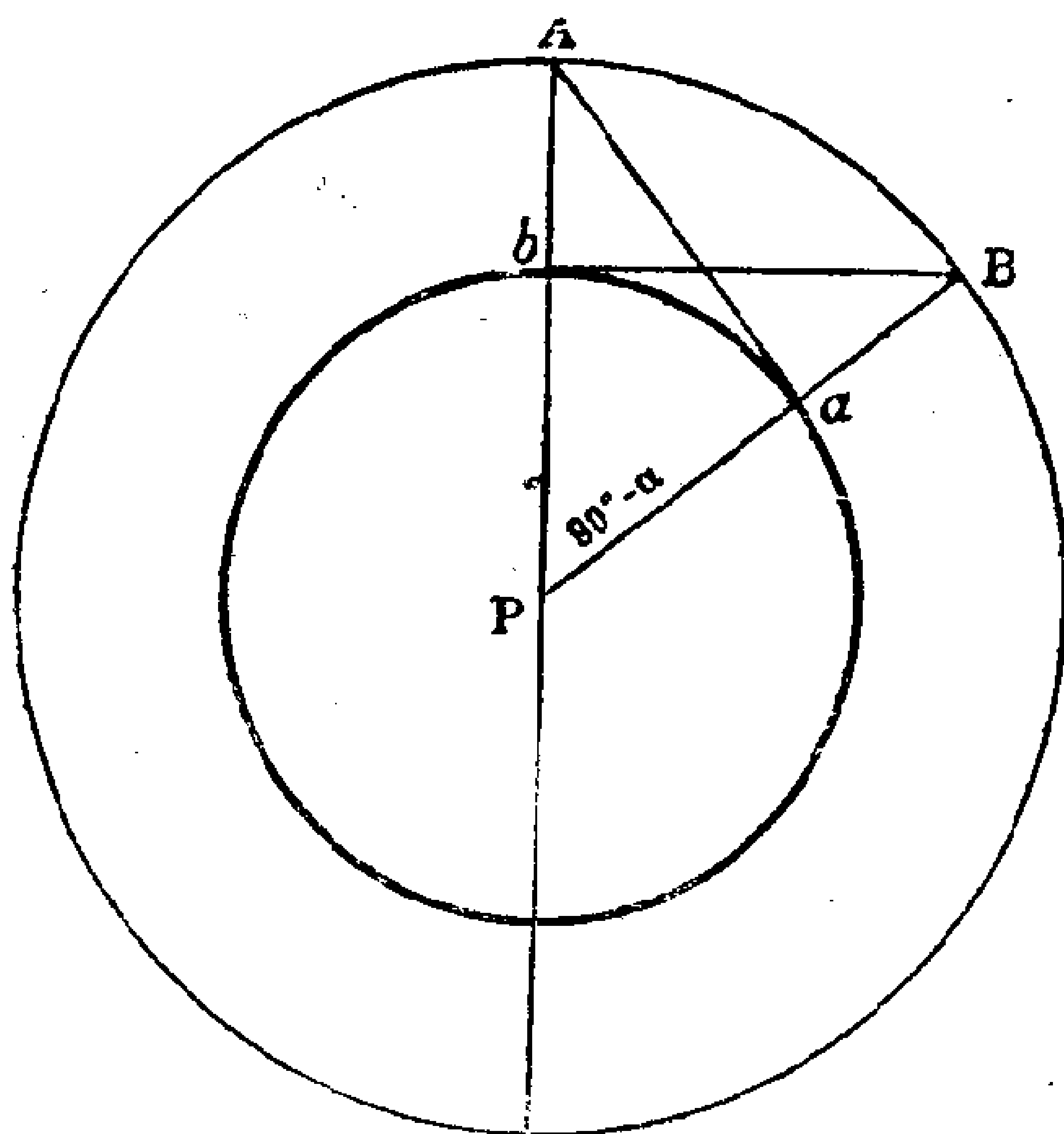


圖 10

（i）在投影面圓周取 A、B 二点，使 $\widehat{APB}=90°-\alpha°$；

（ii）自 B 作 Bb 垂直于 PA，交 PA 于 b；或自 A 作 Aa 垂直于

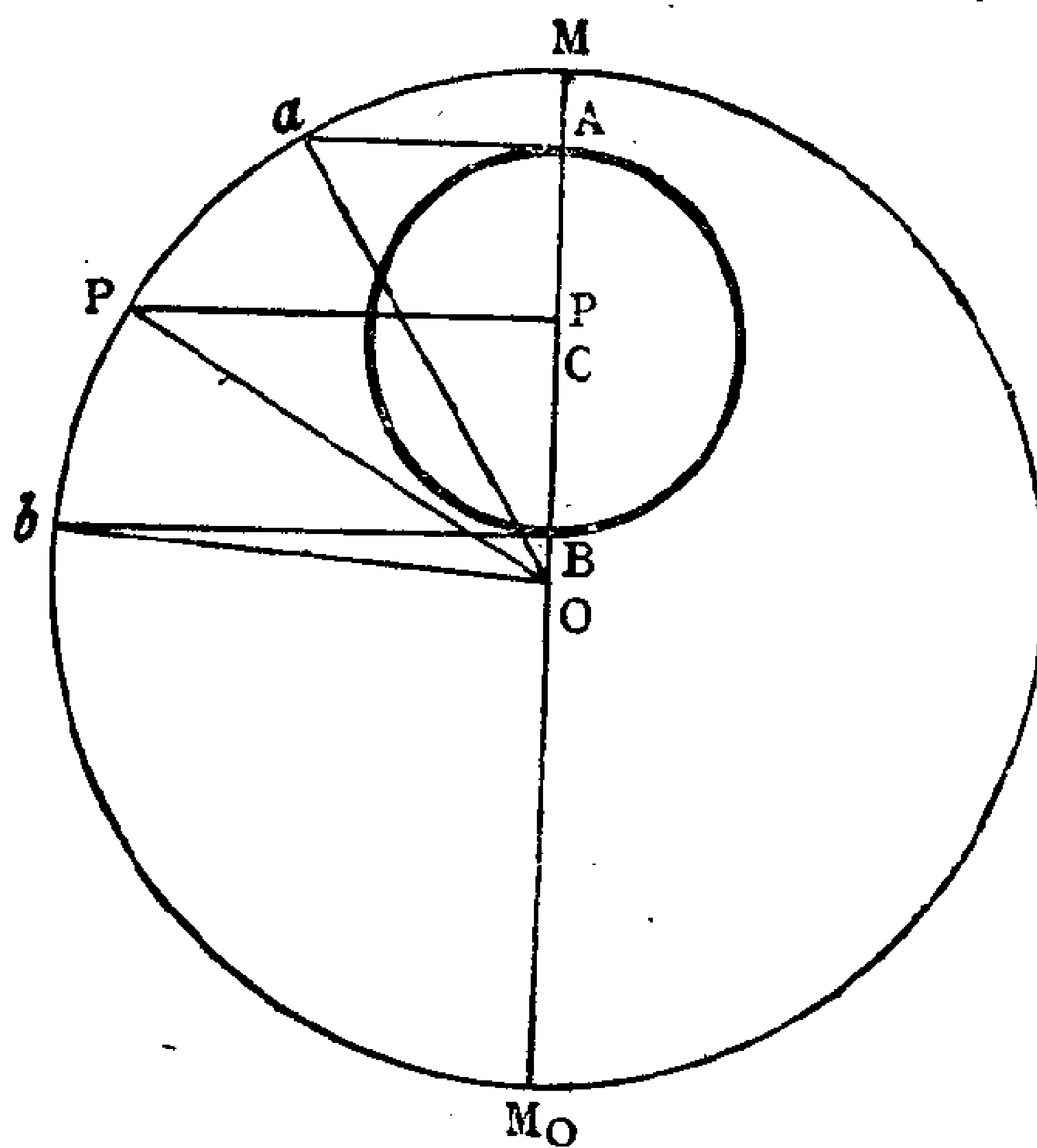


圖 11

PB，交 PB 于 a；

(iii)以 P 为中心，Pa(或 Pb)为半徑作圓，該圓为所求的圓投影。

設圓的極的投影 P 在投影面上任意点（圖 11）。

(i)經 P 作直徑 MPM_0；

(ii)作 Pp 垂直于 MM_0 并交投影面圓周于 p；

(iii)取 $\overset{\frown}{pa}=\overset{\frown}{pb}=\alpha^\circ$，由 a 及 b 作 aA 及 bB 垂直于 MM_0，交 MM_0 于 A 及 B；

(iv)以 AB 为直徑作圓，該圓为所求的圓投影。

b. 作与投影面成 α° 交角的大圓投影。

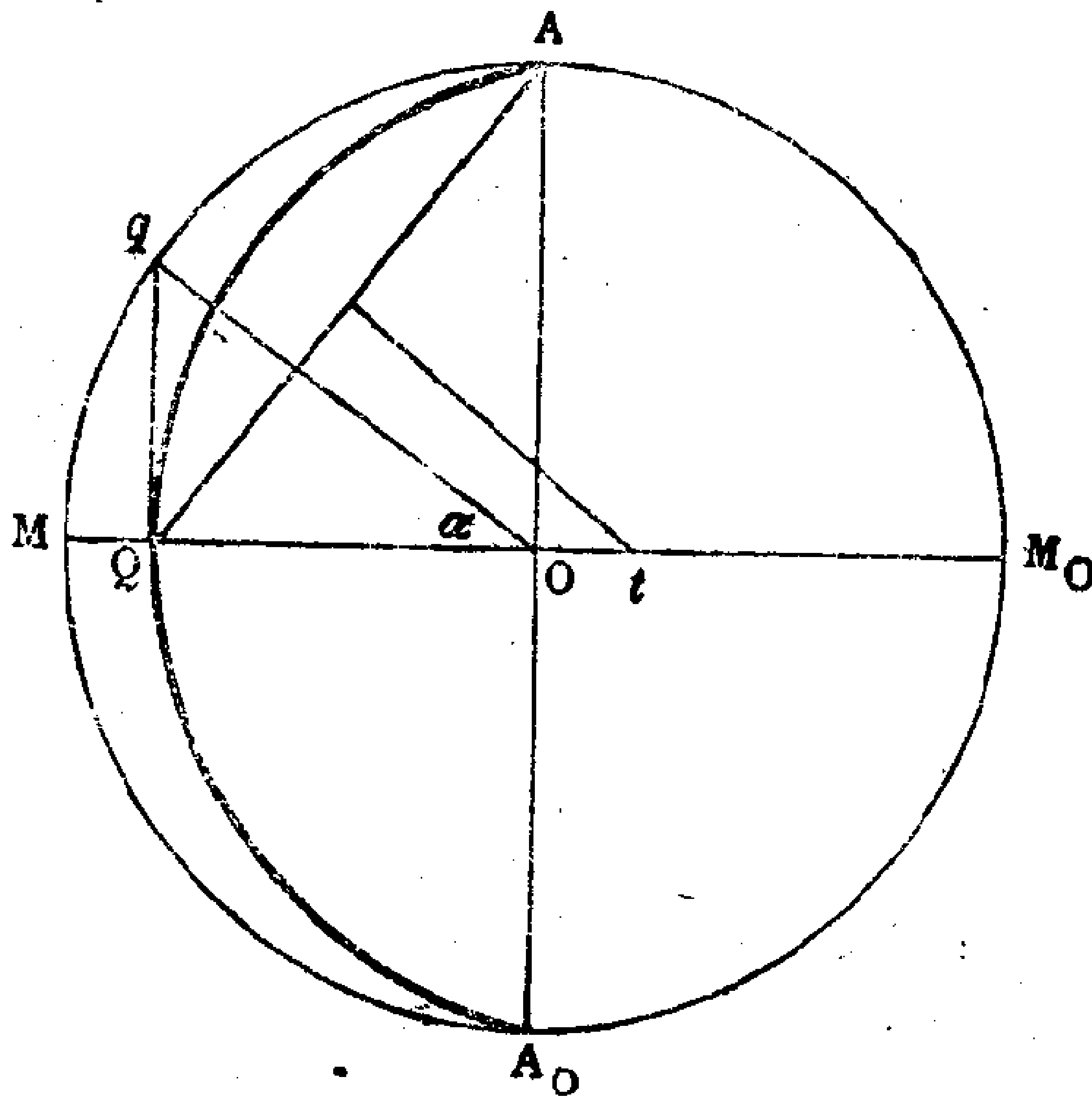


圖 12

(i)在投影面圓周取任意点 A（圖 12），作直徑 AA_0、MM_0 相互垂直；

(ii)取 $\overset{\frown}{Mq}=\alpha^\circ$，并由 q 作 qQ 垂直于 MM_0，交 MM_0 于 Q；

(iii)作 AQ（或 A_0Q）的垂直平分綫，交 MM_0 于 t；

(iv)以 t 为中心，tQ 为半徑作圓弧 $\overset{\frown}{AQA_0}$，$\overset{\frown}{AQA_0}$ 为所求的大圓投影。

c. 作經投影面上一个定点的各大圓投影圓心的軌跡。

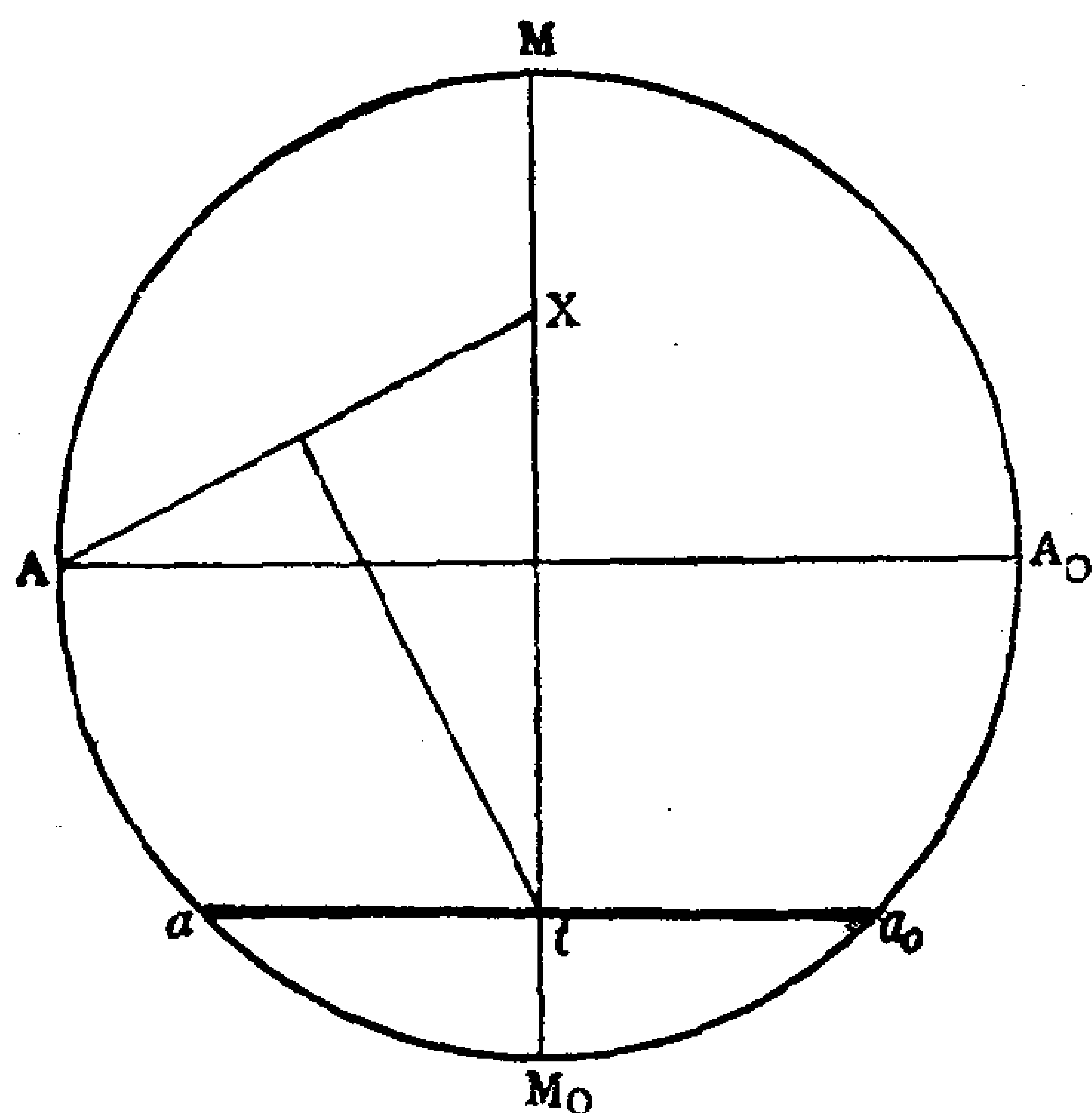


圖 13

設 X 为投影面上的一个定点（圖 13）。

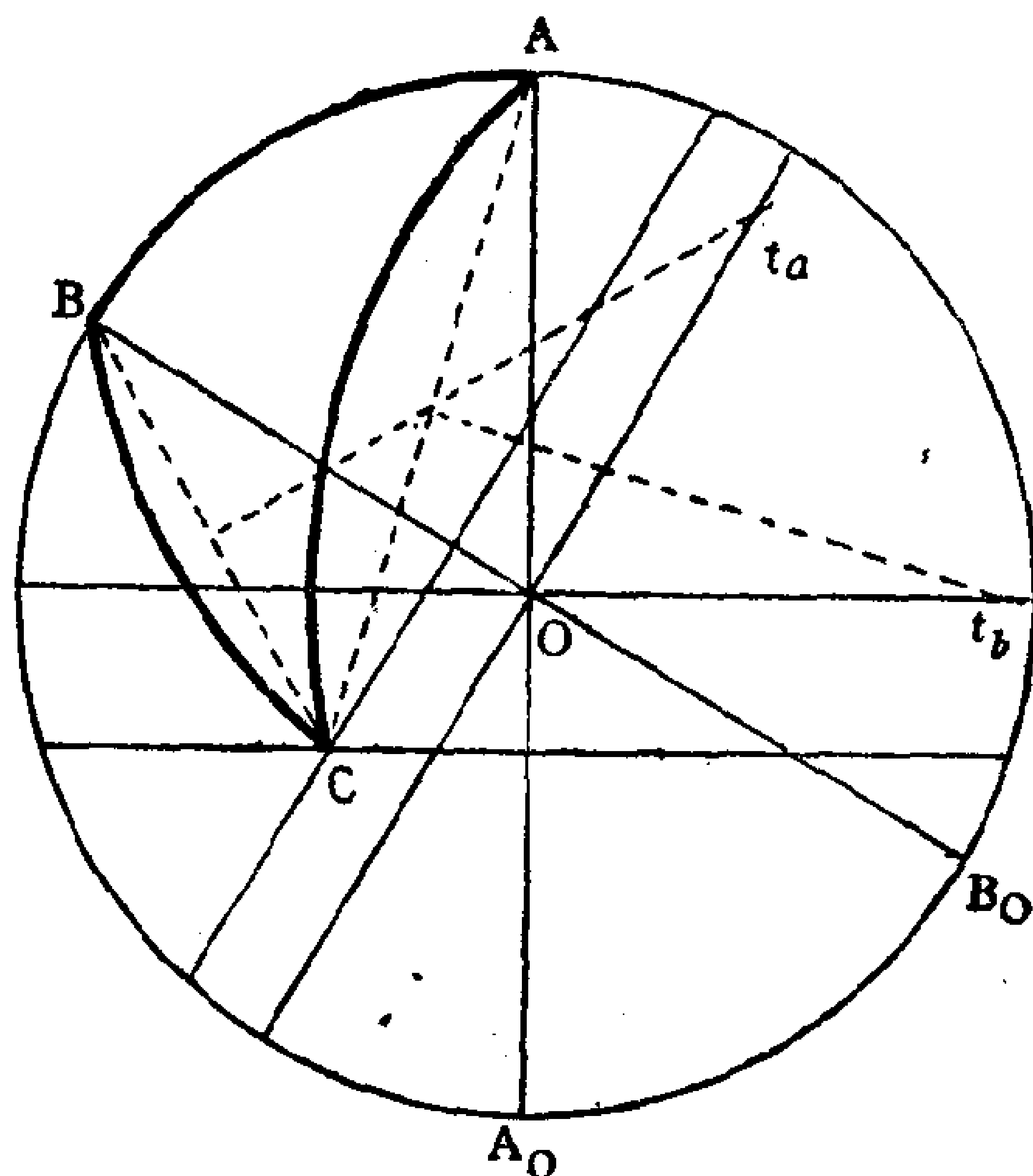
（i）經 X 作直徑 MM_0，并作直徑 AA_0 垂直于 MM_0；

（ii）作 AX（或 A_0X）的垂直平分綫，交 MM_0 于 t；

（iii）經 t 作 aa_0 平行于 AA_0，aa_0 为所求的軌跡。

例題 1. 已知球面三角形的三边 a、b、c，作該球面三角形。

解 設选用球面三角形的 c 边的大圓为投影面圓周。



（例題 1 附圖）

(i)以 O 为中心作投影面圓周，并取 $\widehat{AB}=C$;

(ii)分别以 A 及 B 为極，b 及 a 为極距，作圓弧的投影并相交于 C;

(iii)作大圓弧 $\widehat{AC}$ 及 $\widehat{BC}$ 的投影，于是 ABC 为所求的球面三角形。

例題 2. 已知球面三角形的二边 b、c 及其夾角 A，作該球面三角形圖。

解 設选用球面三角形的 C 边的大圓为投影面圓周。

(i)以 O 为中心作投影面圓周，并取 $\widehat{AB}=C$;

(ii)作大圓弧 $\widehat{AC}$ 的投影，使 $\widehat{AC}=b$ 并与 $\widehat{AB}$ 成 A 角;

(iii)作大圓弧 $\widehat{BC}$ 的投影，于是 ABC 为所求的球面三角形。

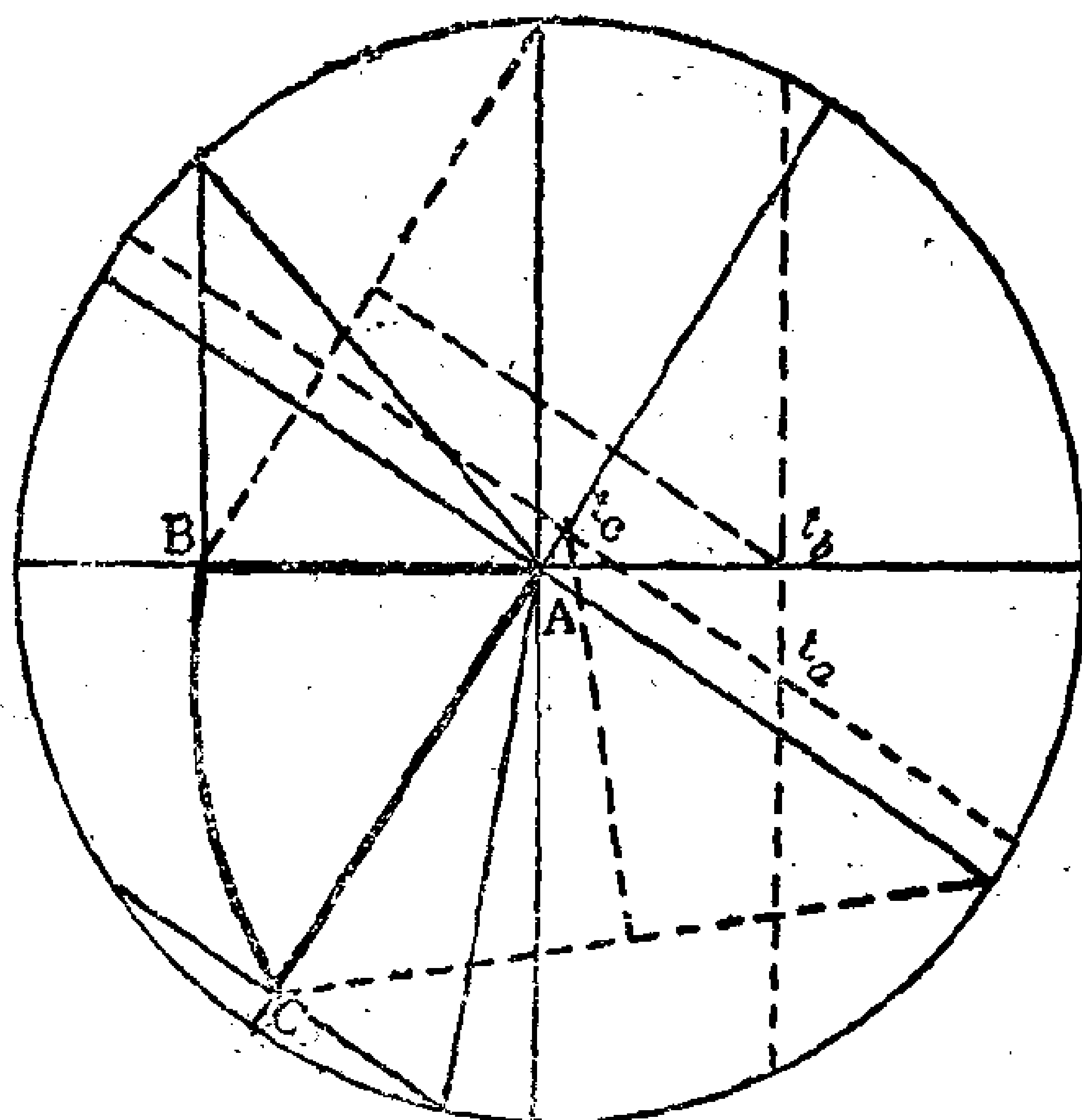
設选用球面三角形的頂点 A 为投影面圓心。

(i)以 A 为中心作投影面圓周;

(ii)作 $AB=C$，$AC=b$，并使 $B\widehat{A}C=A$;

(iii)經 B、C 作大圓弧 $\widehat{BC}$ 的投影，于是 ABC 为所求的球面三角形。

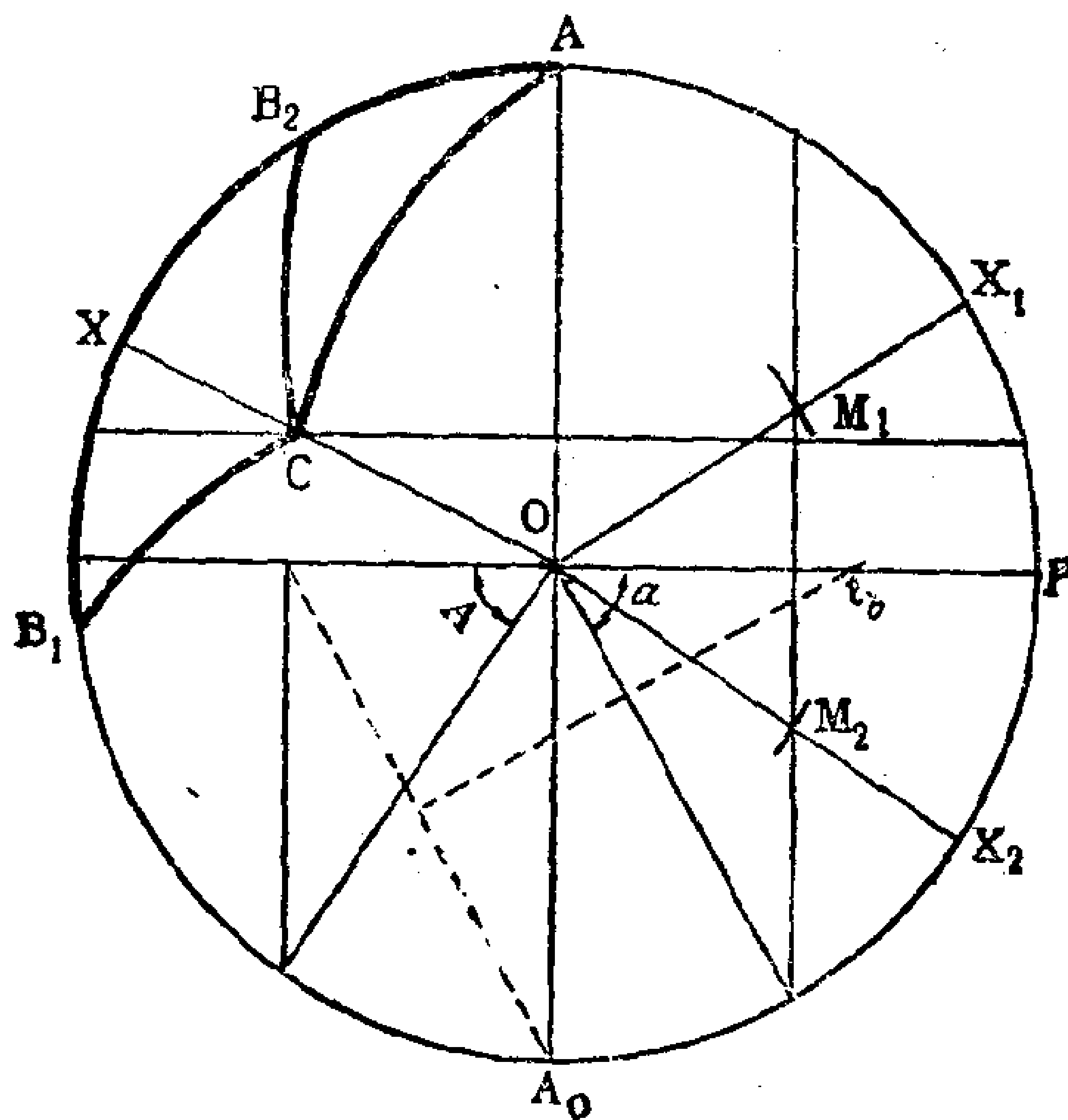
（例題 2 附圖 a）



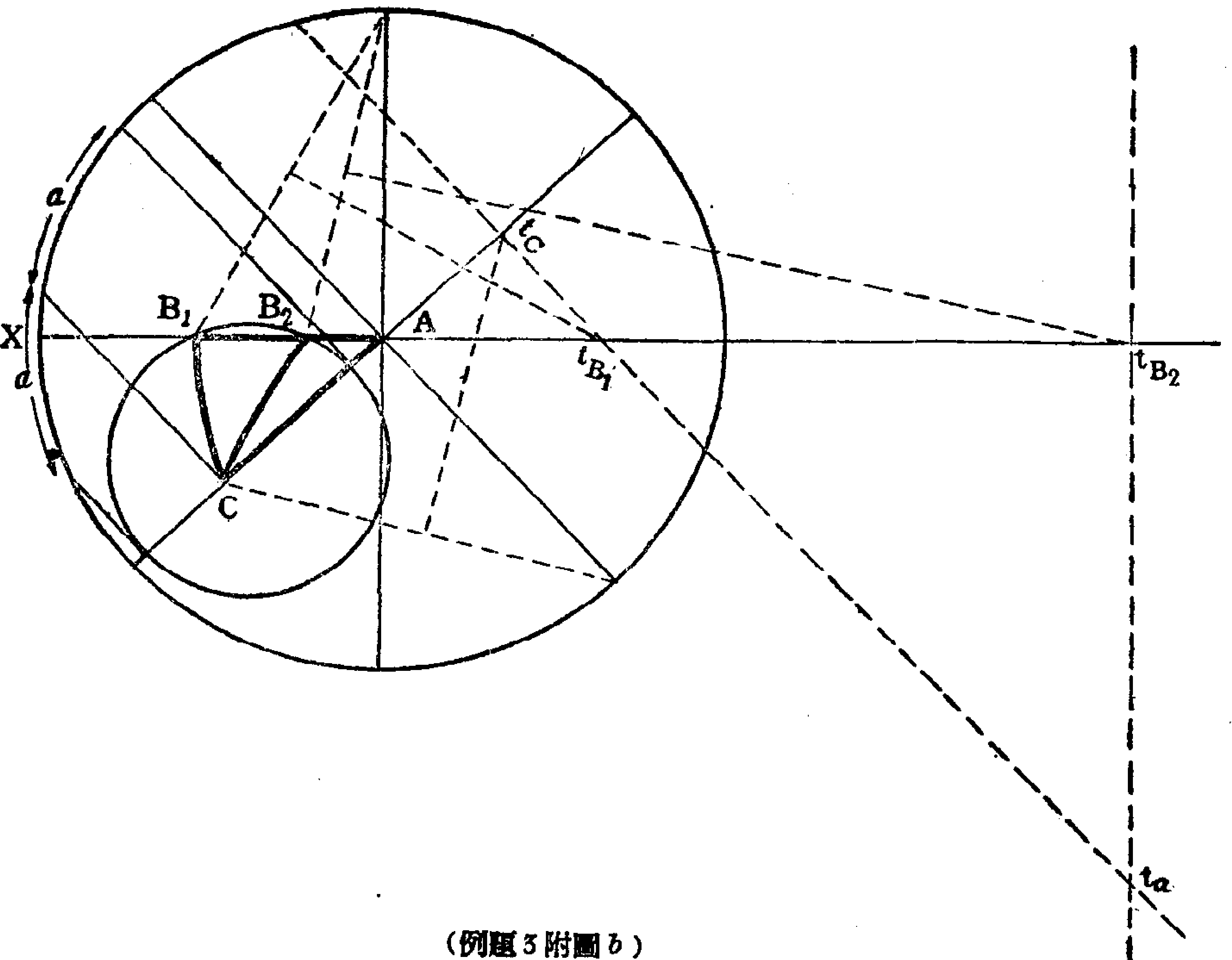
（例題 2 附圖 b）

例題 3. 已知球面三角形的二边 a、b 及其一边的对角 A，作該球面三角形圖。

解 設选用球面三角形的 C 边的大圓为投影面圓周。



（例題 3 附圖 a）



(例題3附圖b)

（i）以 O 为中心作投影面圆周，并在其上取一点 A；由 A 作大圆弧 $\widehat{AC}$ 的投影，使 $\widehat{AC}=b$ 并与投影面圆周成 A 角；

（ii）在投影面圆周上取任意点 p；以 p 为极，a 为極距，作該圆弧的投影；

（iii）以 O 为中心，OC 为半徑作弧，交所作的圆弧投影于 m_1 及 m_2；

（iv）連 OC、Om_1、Om_2，分别交投影面圆周于 x、x_1、x_2；

（v）在 x 的兩旁沿投影面圆周取 $xB_1=x_1p$，$xB_2=x_2p$；

（vi）作大圆弧 $\widehat{B_1C}$ 及 $\widehat{B_2C}$ 的投影，于是 AB_1C 及 AB_2C 为所求的球面三角形（但必須注意，只有 B 点在 $\widehat{AXA_0}$ 范围內所成的球面三角形圖形才是題解所要求的）。

設选用球面三角形的頂点 A 为投影面圆心。

（i）以 A 为中心作投影面圆周；

（ii）作 $AC=b$，并作 Ax，使 $C\widehat{A}X=A$；

（iii）以 C 为極，a 为極距，作該圆弧的投影，交 Ax 于 B_1 及 B_2；

（iv）作大圆弧 $\widehat{B_1C}$ 及 $\widehat{B_2C}$ 的投影，于是 AB_1C 及 AB_2C 为所求的球面三角形。

第二章　球　面　三　角

§4.　球面任意三角形

4.1　球面三角形基本公式的証明

球面三角学的主要任务是研究球面三角形要素間的相互关系，并將这种关系用方程式表达出来。用以表达球面三角形要素关系的方程式叫作球面三角公式。当具有足够的条件时，这样的公式可用以解球面三角形。

球面三角公式中的**球面正弦公式、球面五联关系式、球面余弦公式**常被称为**球面三角基本公式**。以这三个公式为基础，可以导出其余的球面三角公式。

設以球面三角形ABC的球心O作为直角三軸座标（右手系）的原点，OA为Z軸，Y軸OY在AOB平面，X軸垂直于AOB平面（圖14），于是球面三角形ABC的頂点C的座标为x.y.z。

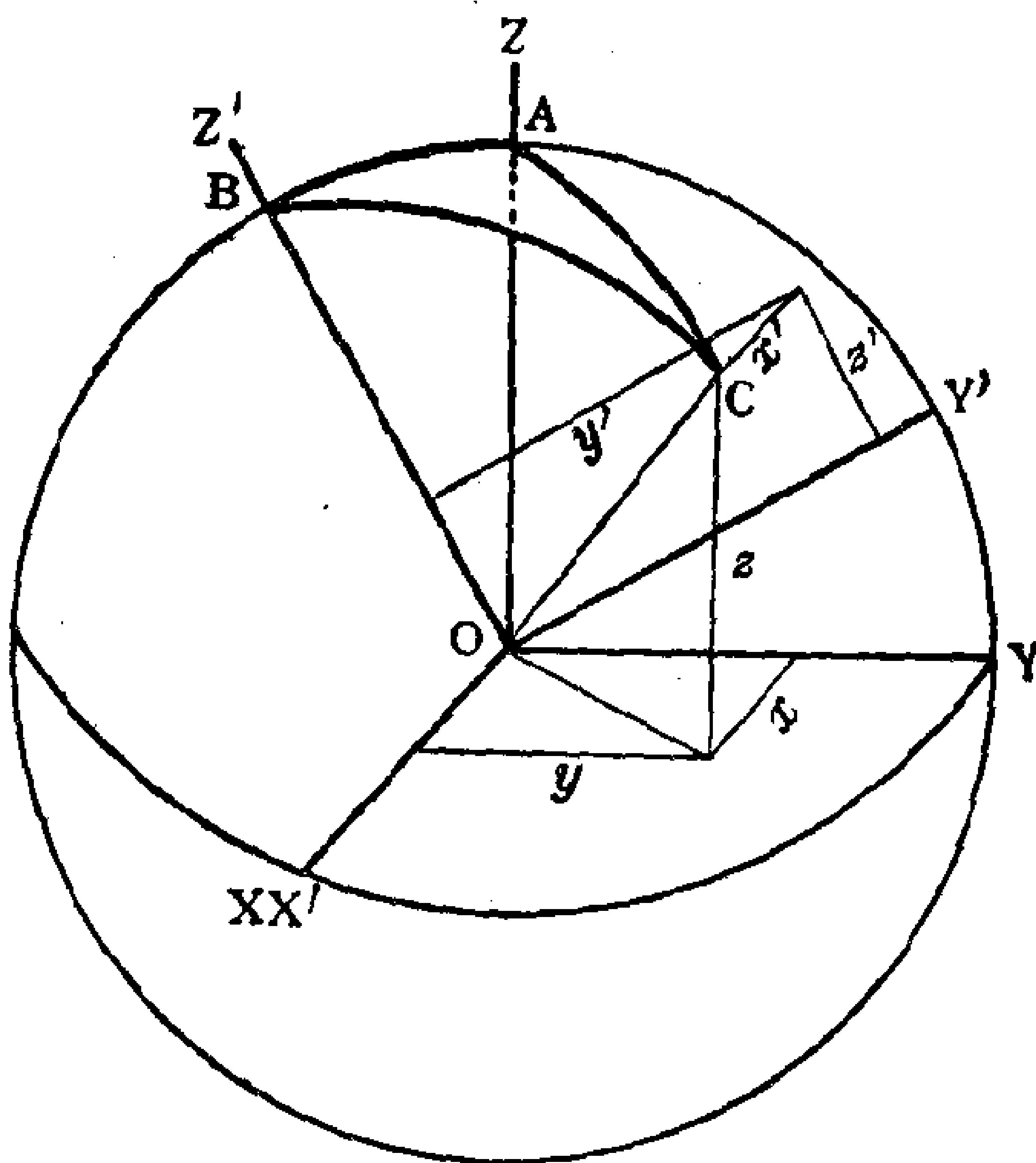


圖 14

今將Z軸在AOB平面上旋轉一个角度C，使OB疊于OZ，并称OB为Z'軸，則在新的座标系中，Y'軸OY'与OY的交角为C，而X'軸OX'則与OX相疊，于是頂点C的座标为x'、y'、z'。

根据座标变换的关系得

$$x'=x,\quad y'=y\cos c+z\sin c,\quad z'=-y\sin c+z\cos c$$

但座标与球面三角形要素的关系是

$$x=OC\cdot\sin b\cdot\sin A,\quad y=-OC\cdot\sin b\cdot\cos A,\quad z=OC\cdot\cos b。$$

$$x'=OC\cdot\sin a\cdot\sin B,\quad y'=OC\cdot\sin a\cdot\cos B,\quad z'=OC\cdot\cos a。$$

將它們分別代入上面三个式中，則得

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cdot\sin B&=\sin b\cdot\sin A\\ \sin a\cdot\cos B&=\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A\\ \cos a&=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&*1\\&*2\\&*3\end{aligned}$$

式＊1 叫作球面正弦公式，它含有球面三角形中四个要素，即兩个角和这兩个角所对的边，**任一个角正弦与其所对的边正弦的比，等于另一个角正弦与其所对的边正弦的比，**即

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}\tag{1}$$

式＊2 叫作**球面五联关系式，它含有**球面三角形中五个相联的要**素，**即三个边和兩个角，**一个外边正弦与其鄰角余弦的乘积，等于另一外边余弦与内边正弦的乘積減去这个外边正弦、内边余弦及这兩边夹角余弦的連乘积，**即

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cdot\cos B&=\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A\\ \sin a\cdot\cos C&=\cos c\cdot\sin b-\sin c\cdot\cos b\cdot\cos A\\ \sin b\cdot\cos A&=\cos a\cdot\sin c-\sin a\cdot\cos c\cdot\cos B\\ \sin b\cdot\cos C&=\cos c\cdot\sin a-\sin c\cdot\cos a\cdot\cos B\\ \sin c\cdot\cos A&=\cos a\cdot\sin b-\sin a\cdot\cos b\cdot\cos C\\ \sin c\cdot\cos B&=\cos b\cdot\sin a-\sin b\cdot\cos a\cdot\cos C\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式＊3 叫作球面余弦公式，它含有球面三角形中四个要素，即三个边和一个角，一个边的余弦，**等于其余兩个边余弦的乘积加上这兩个边正弦和它的夹角余弦的連乘积，**即

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A\\ \cos b&=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos B\\ \cos c&=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

4.2 球面正弦公式

上节已經証明球面正弦公式是球面三角形任一个角正弦与其所对的边正弦的比等于另一个角正弦与其所对的边正弦的比。只要已知球面三角形的兩个边和其中一个边的对角，或兩个角和其中一个角的对边，就可以用球面正弦公式求另一个对角或对边的值。但必須注意，由正弦函数求值，所得的兩个互为补角的解不是在任何情况下都能适合所解的球面三角形。因此，判定适合的解就成为采用球面正弦公式求值所必須考虑的問題。

a. 設已知球面三角形的兩个边 a、b 及角 A，由球面正弦公式得

$$\sin B=\frac{\sin b\cdot\sin A}{\sin a}$$

可以肯定，当 $\sin a<\sin b\cdot\sin A$ 时 $\sin B>1$，但 $\sin B$ 不可能大于一，所以 B 没有解；当 $\sin a=\sin b\cdot\sin A$ 时，$\sin B=1$，所以 B 只有一个解即 $B=90^\circ$；当 $\sin a>\sin b\cdot\sin A$ 时，$\sin B<1$，B 的解有如下几种情况。

第一种情况：　$A<90^\circ$，$b<90^\circ$。

$a<b$ 兩解 $B_1=B$，$B_2=180^\circ-B$；

$180^\circ-b>a\geqslant b$ 一解 $B\leqslant A$；

$180^\circ-b\leqslant a>b$ 無解。

第二种情况：　$A<90^\circ$，$b>90^\circ$，

$180^\circ-b>a<b$ 兩解 $B_1=B$，$B_2=180^\circ-B$；

$180^\circ-b\leqslant a<b$ 一解 $180^\circ-A<B>A$；

$a\geqslant b$ 無解。

第三种情况：　$A>90^\circ$，$b<90^\circ$，

$a\leqslant b$ 無解；

$180^\circ-b\geqslant a>b$ 一解 $A>B<180^\circ-A$；

$180^\circ-b<a>b$ 兩解 $B_1=B$，$B_2=180^\circ-B$。

第四种情况：　$A>90^\circ$，$b>90^\circ$，

$180^\circ-b\geqslant a>b$ 無解；

$180^\circ-b<a\leqslant b$ 一解 $B\geqslant A$；

$a>b$ 兩解 $B_1=B$，$B_2=180^\circ-B$。

b.設已知球面三角形的兩个角 A、B 及边 a，由球面正弦公式得

$$\sin b=\frac{\sin B\cdot\sin a}{\sin A}$$

当 $\sin A<\sin B\cdot\sin a$ 时，$\sin b>1$，但 $\sin b$ 不可能大于一，所以 b 没有解；当 $\sin A=\sin B\cdot\sin a$ 时，$\sin b=1$，所以 b 只有一个解，即 $b=90°$；当 $\sin A>\sin B\cdot\sin a$ 时，B 的解有如下几种不同情况。

第一种情况： $a<90°$，$B<90°$

$A<B$ 兩解 $b_1=b$，$b_2=180°-b$；

$180°-B>A\geqslant B$ 一解 $b\leqslant a$；

$180°-B\leqslant A>B$ 無解。

第二种情况： $a<90°$，$B>90°$

$180°-B>A<B$ 兩解 $b_1=b$，$b_2=180°-b$；

$180°-B\leqslant A<B$ 一解 $180°-a<b>a$；

$A\geqslant B$ 無解。

第三种情况： $a>90°$，$B<90°$

$A\leqslant B$ 無解；

$180°-B\geqslant A>B$ 一解 $180°-a>a<a$；

$180°-B<A>B$ 兩解 $b_1=b$，$b_2=180°-b$。

第四种情况： $a>90°$ $B>90°$

$180°-B\geqslant A<B$ 無解

$180°-B<A\leqslant B$ 一解 $b\geqslant a$；

$A>B$ 兩解 $b_1=b$，$b_2=180°-b$。

从上面各种情况看来，判定正弦函数所求的値是比較复杂。因此，除非不得已，解球面三角形应当保量避免采用正弦函数定值。

例題 4. 設球面三角形 ABC，$a=114°29'.2$，$b=69°47'.7$，$A=134°19'.5$，求 B 角的値。

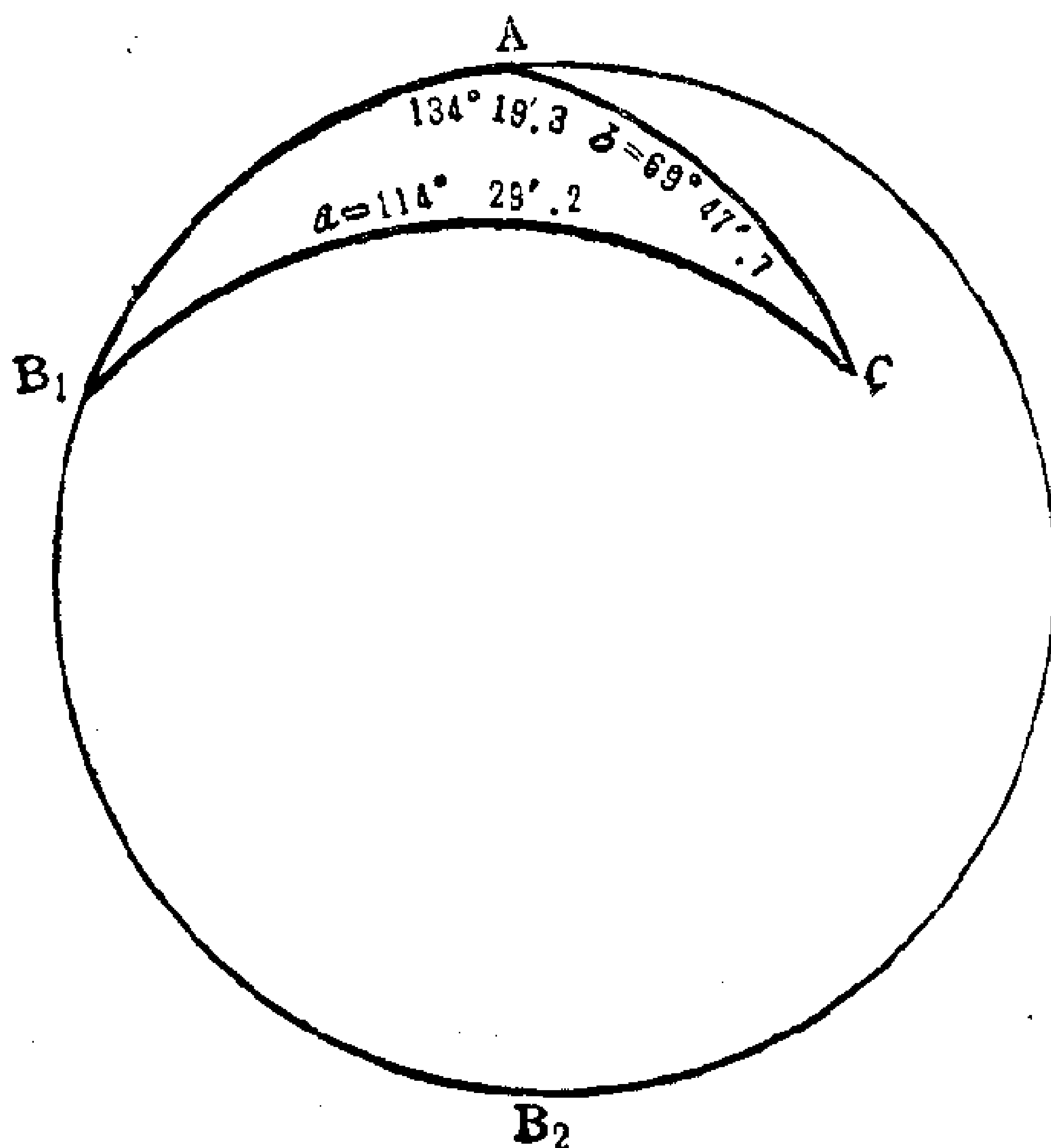
解 由球面正弦公式(1)得 $\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\cdot\sin A$，

今 $A>90°$，$b<90°$，而 $180°-b<a>b$，故知 B 有二解。

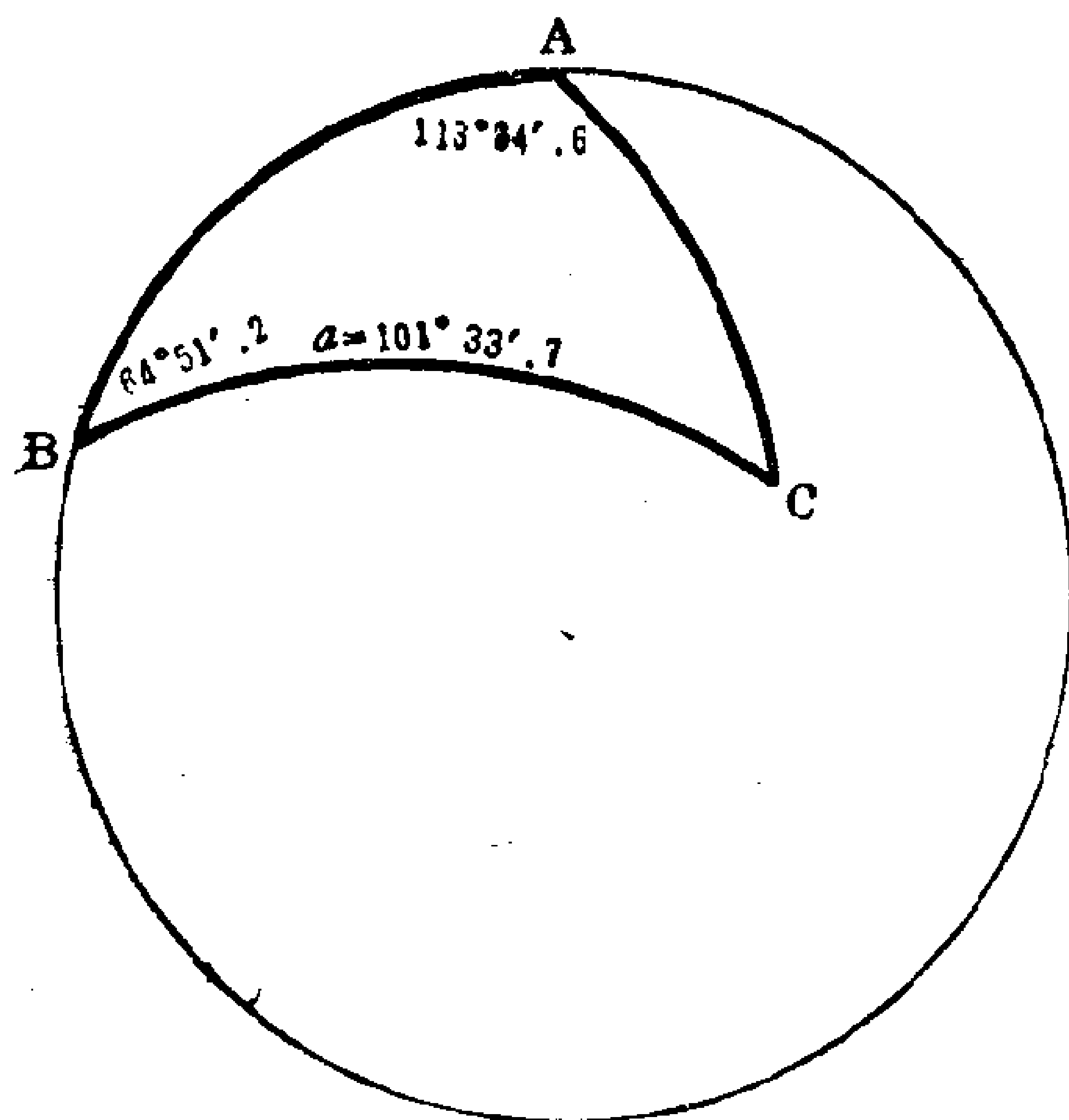
$A=134°19'.5$	Lsin 9.854 56
$b=\ \ 69°47'.7$	Lsin 9.972 42

$a=114°29.2$ $\quad$ $L\csc$ 9.040 93

$B_1=47°32'.4$ $\quad$ $B_2=132°27'.6$ $\quad$ $L\sin$ 9.867 91



（例題 4 附圖）



（例題 5 附圖）

例題5. 設球面三角形ABC，$A=113°24'.6$，$B=64°51'.2$，$a=101°33'.7$，求b邊的值。

解　由球面正弦公式(1)得

$$\sin b=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\sin a$$

今 $a>90°$，$B<90°$，而 $180°-B>A>B$，故知B只有一解，且 $180°-a>b<a$。

$a=101°33'.7$	$L\sin$ 9.991 10
$B=64°51'.2$	$L\sin$ 9.956 75
$A=113°24'.6$	$L\csc$ 0.037 31
$b=75°06'.5$	$L\sin$ 9.985 16

4.3 球面五联关系式、球面四联关系式

§4 第1节所証明的球面五联关系式（2）仅含有球面三角形的三个边和兩个角等五个相联的要素，对于球面三角形的三个角及兩个边的五个相联要素的关系式，可以通过極綫三角形的关系，由式（2）导出，即

$$\left.\begin{aligned}
\sin A\cdot\cos b&=\cos B\cdot\sin C+\sin B\cdot\cos C\cdot\cos a\\
\sin A\cdot\cos c&=\cos C\cdot\sin B+\sin C\cdot\cos B\cdot\cos a\\
\sin B\cdot\cos a&=\cos A\cdot\sin C+\sin A\cdot\cos C\cdot\cos b\\
\sin B\cdot\cos c&=\cos C\cdot\sin A+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos b\\
\sin C\cdot\cos a&=\cos A\cdot\sin B+\sin A\cdot\cos B\cdot\cos c\\
\sin C\cdot\cos b&=\cos B\cdot\sin A+\sin B\cdot\cos A\cdot\cos c
\end{aligned}\right\}\quad(2a)$$

由上面的式子可以看出，球面三角形的三个角及兩个边等五个相联要素的关系是**一个外角正弦与其鄰边余弦乘积，等于另一外角余弦与内角正弦乘积加上这个外角正弦内角余弦及这兩个角的夹边余弦連乘积。**

球面五联关系式(2a)有

$$\sin A\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin C+\sin B\cdot\cos C\cdot\cos a$$

今以 $\sin B$ 除上式的各項得

$$\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\cos b=\mathrm{ctg}B\cdot\sin C+\cos C\cdot\cos a$$

但
$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin b}$$

代入則得 $\quad \mathrm{ctg}b\cdot\sin a=\mathrm{ctg}B\cdot\sin C+\cos C\cdot\cos a$

这个式子含有球面三角形的四个相联要素，因此叫作**球面四联关系式**，它的**外边余切与内边正弦的乘积，等于外角余切与内角正弦的乘积加上内角余弦与内边余弦的乘积**，即

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{ctg}a\cdot\sin b&=\mathrm{ctg}A\cdot\sin C+\cos C\cdot\cos b\\
\mathrm{ctg}a\cdot\sin c&=\mathrm{ctg}A\cdot\sin B+\cos B\cdot\cos c\\
\mathrm{ctg}b\cdot\sin a&=\mathrm{ctg}B\cdot\sin C+\cos C\cdot\cos a\\
\mathrm{ctg}b\cdot\sin c&=\mathrm{ctg}B\cdot\sin A+\cos A\cdot\cos c\\
\mathrm{ctg}c\cdot\sin a&=\mathrm{ctg}C\cdot\sin B+\cos B\cdot\cos a\\
\mathrm{ctg}c\cdot\sin b&=\mathrm{ctg}C\cdot\sin A+\cos A\cdot\cos b.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

球面四联关系式經移項之后，可用于解球面三角形四个相联要素的外边或外角，实际上这也就是已知球面三角形的二角及其夾边解其余二边，或已知二边及其夾角解其余二角。例如：

$$\operatorname{ctg}a=\operatorname{ctg}A\cdot\sin B\cdot\csc c+\cos B\cdot\operatorname{ctg}c$$

$$\operatorname{ctg}b=\operatorname{ctg}B\cdot\sin A\cdot\csc c+\cos A\cdot\operatorname{ctg}c$$

$$\operatorname{ctg}A=\operatorname{ctg}a\cdot\sin b\cdot\csc C-\cos b\cdot\operatorname{ctg}C$$

$$\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}b\cdot\sin a\cdot\csc C-\cos a\cdot\operatorname{ctg}C$$

但是，这些算式不是对数式，演算很不便利，应当避免使用。如果必須用到这个公式进行計算时，除了用**和差对数計算表**外❶，也可采用**輔助角**的方法，以簡化演算手續。

例題 6. 設球面三角形 ABC，$A=55°42'$，$B=49°21'$，$C=110°15'$，求 a 边的値。

---

❶ 和差对数計算表是根据下列关系而設計的。由代数学已知

$$X\pm Y=X\left(1\pm\frac{1}{\frac{X}{Y}}\right)$$

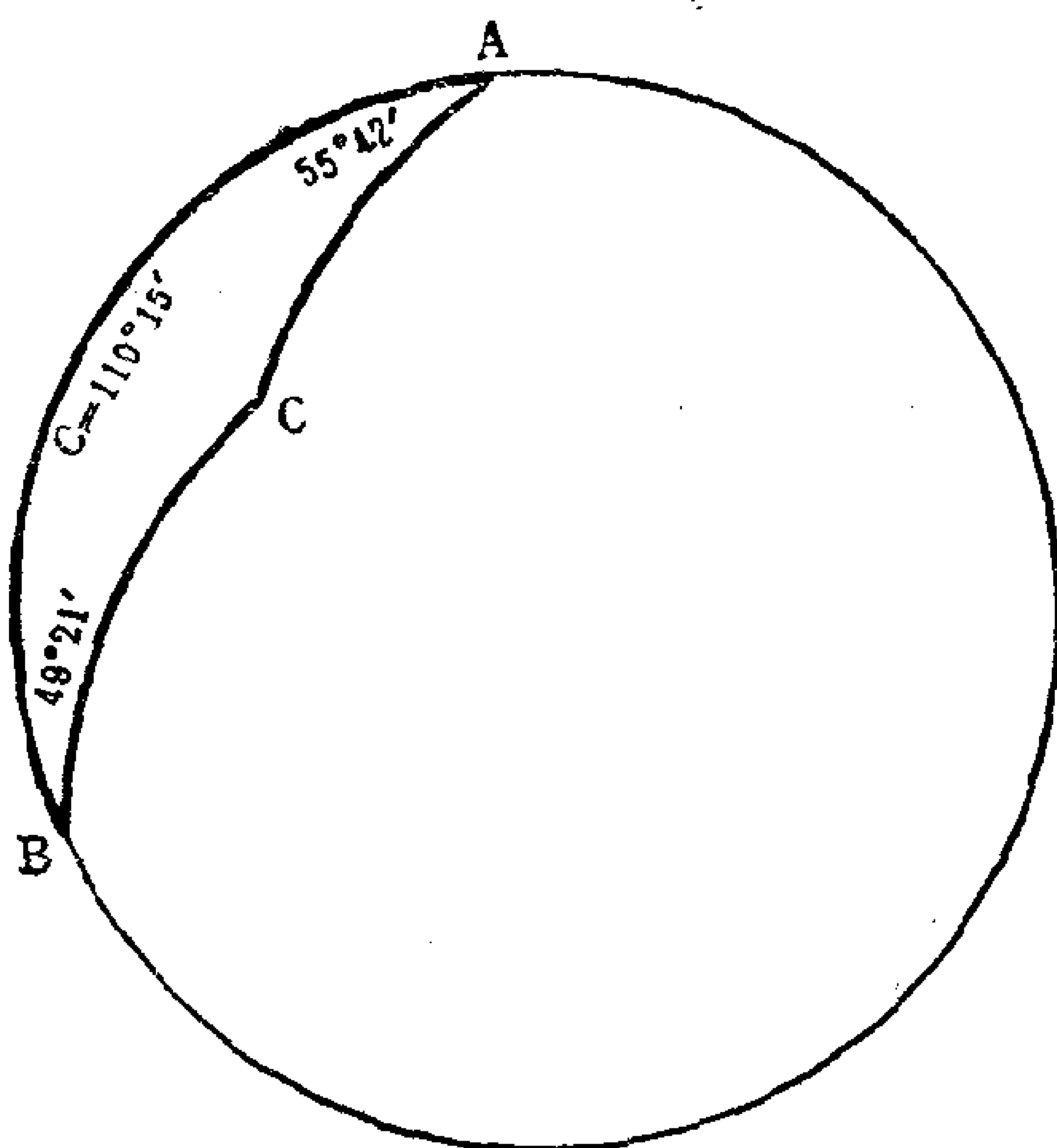
故
$$\log(X\pm Y)=\log x+\log\left(1\pm\frac{1}{\frac{X}{Y}}\right)$$

命
$$\alpha=\log\left(1+\frac{1}{\frac{X}{Y}}\right),\quad B=\log\left(1-\frac{1}{\frac{X}{Y}}\right):$$

∴
$$\log(x+y)=\log x+\alpha$$
$$\log(x-y)=\log x+\beta$$

和差对数計算表以 $(\log x-\log y)$ 为引数，在 α 表給出 $\log\left(1+\frac{1}{\frac{X}{Y}}\right)$ 的値，在 β 表給出 $\log\left(1-\frac{1}{\frac{X}{Y}}\right)$ 的値。

解



（例题6附圖）

由球面四联关系式（4）　　$\operatorname{ctg}a=\operatorname{ctg}A\cdot\sin B\cdot\csc c+\cos B\cdot\operatorname{ctg}c$

以 M_a 为輔助角并命　　$\operatorname{ctg}A\cdot\csc c=\operatorname{ctg}M_a\cdot\operatorname{ctg}c$

即　　$\operatorname{tg}M_a=\operatorname{tg}A\cdot\cos c$

于是　　$\operatorname{ctg}a=\operatorname{ctg}c\cdot\csc M_a\cdot\sin(B+M_a)$

$A=55°42'$	$L\operatorname{tg}$ 0.16612	
$C=110°15'$	$L\cos$ 9.53922 *n*	$L\operatorname{ctg}$ 9.56693 *n*
$M_a=153°05'.8$	$L\operatorname{tg}$ 9.70534 *n*	$L\csc$ 0.34440
$B=49°21'.0$		
$B+M_a=202°26'.8$	$L\sin$ 9.58186 *n*	
$a=72°42'.5$	$L\operatorname{ctg}$ 9.49319	

本例題亦可用“和差对数計算表”計算，計算方法如下：

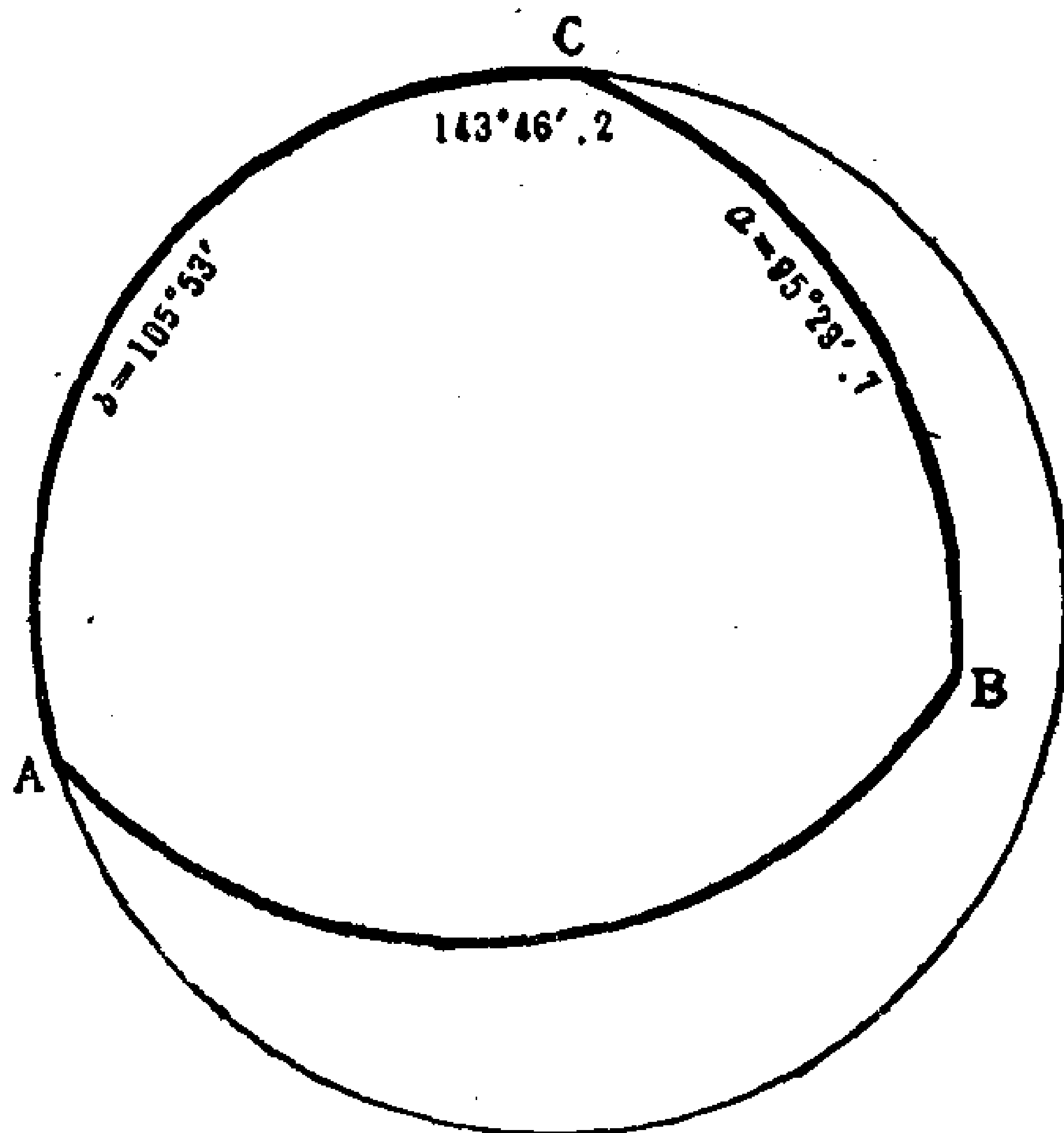
由球面四联关系式（4）

$$\operatorname{ctg} a = \overset{+}{\operatorname{ctg}} A \cdot \sin \overset{+}{B} \cdot \overset{+}{\csc} c + \overset{+}{\cos} B \cdot \overset{-}{\operatorname{ctg}} C = + \text{I} - \text{II}$$

$A=55°42'$	$L\operatorname{ctg}$ 9.83388	
$B=49°21'$	$L\sin$ 9.88007	$L\cos$ 9.81387
$C=110°15'$	$L\csc$ 0.02771	$L\operatorname{ctg}$ 9.56693 n
	9.74166	9.38080
	β 9.75155	$+\text{I}-\text{II}$ 0.36086
$a=72°42'.4$	$L\operatorname{ctg}$ 9.49321	

例題 7. 設球面三角形ABC，$a=95°29'.7$，$b=105°53'$，$C=143°46'.2$，求A角的值。

解



（例題7附圖）

由球面四联关系式（4） $\operatorname{ctg}A=\operatorname{ctg}a\cdot\sin b\cdot\csc C-\cos b\cdot\operatorname{ctg}C$

命 $\operatorname{ctg}a\cdot\csc C=\operatorname{ctg}M_A\cdot\operatorname{ctg}C$

即 $\operatorname{tg}M_A=\operatorname{tg}a\cdot\cos C$

于是 $\operatorname{ctg}A=\operatorname{ctg}C\cdot\csc M_A\cdot\sin(b-M_A)$

$a=95^\circ29'.7$	$L\operatorname{tg}$	1.01682 n		
$C=143^\circ46'.2$	$L\cos$	9.90669 n	$L\operatorname{ctg}$	0.13507 n
$M_A=83^\circ11'.9$	$L\operatorname{tg}$	0.92351	$L\csc$	0.00307
$b=105^\circ53'.0$				
$b-M_A=22^\circ41'.1$			$L\sin$	9.58621
$A=117^\circ55'.7$			$L\operatorname{ctg}$	9.72435 n

本例題用"和差对数計算表"的計算如下：

由球面四联关系式（4）

$$\operatorname{ctg}A=\overset{-}{\operatorname{ctg}a}\cdot\overset{+}{\sin b}\cdot\overset{+}{\csc C}-\overset{-}{\cos b}\cdot\overset{-}{\operatorname{ctg}C}=-\mathrm{I}-\mathrm{II}$$

$a=95^\circ29'.7$	$L\operatorname{ctg}$ 8.98318n	
$b=105^\circ53'.0$	$L\sin$ 9.98309	$L\cos$ 9.43724 n
$C=143^\circ46'.2$	$L\csc$ 0.22839	$L\operatorname{ctg}$ 0.13508 n
	9.19466 n	9.57232
	$-\mathrm{I}-\mathrm{II}$ 0.37766	α 0.15202 n
$A=117^\circ55'.6$		$L\operatorname{ctg}$ 9.72434 n

4.4 球面余弦公式

球面余弦公式有四种不同的写法，而每种的写法均有其單独的意义

公式（3）是指球面三角形一个边的余弦，等于其余两个边余弦乘积加上这两个边正弦和它的夾角余弦的連乘积。今將公式（3）移項之后，則写成球面三角形一个角的余弦，等于这个角的对边余弦減去鄰边余弦乘积的差，除以鄰边正弦的乘积，即

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}\\ \cos B&=\frac{\cos b-\cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}\\ \cos C&=\frac{\cos c-\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}\end{aligned}\right\}\qquad(3a)$$

公式(3)适用于已知球面三角形的二边及其所夾的角求第三边的値，而公式(3a)則是用于已知球面三角形的三边求角的値。

今以極綫三角形的关系代入式(3)及(3a)，又可得到另外兩組球面余弦公式，即

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a\\ \cos B&=-\cos A\cdot\cos C+\sin A\cdot\sin C\cdot\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos c\end{aligned}\right\}\qquad(3b)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\frac{\cos A+\cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C}\\ \cos b&=\frac{\cos B+\cos A\cdot\cos C}{\sin A\cdot\sin C}\\ \cos c&=\frac{\cos C+\cos A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B}\end{aligned}\right\}\qquad(3c)$$

公式(3b)适用于已知球面三角形的二角及其所夾的边求第三角的値，公式(3c)适用于已知球面三角形的三角求边的値。

应用球面余弦公式进行計算时，可采用輔助角方法以簡化演算的手續（亦可用和差对数計算表）。

例題 8. 設球面三角形 ABC，$b=100°51'.7$，$c=53°28'.0$，$A=14°24'.2$，求 a 边的値。

解

由球面余弦公式(3)　$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$

以 M_a 为輔助角，并命

$$\operatorname{tg} M_a=\cos A\cdot\operatorname{tg} b$$

于是　$\cos a=\cos b\cdot\sec M_a\cdot\cos(M_a-c)$

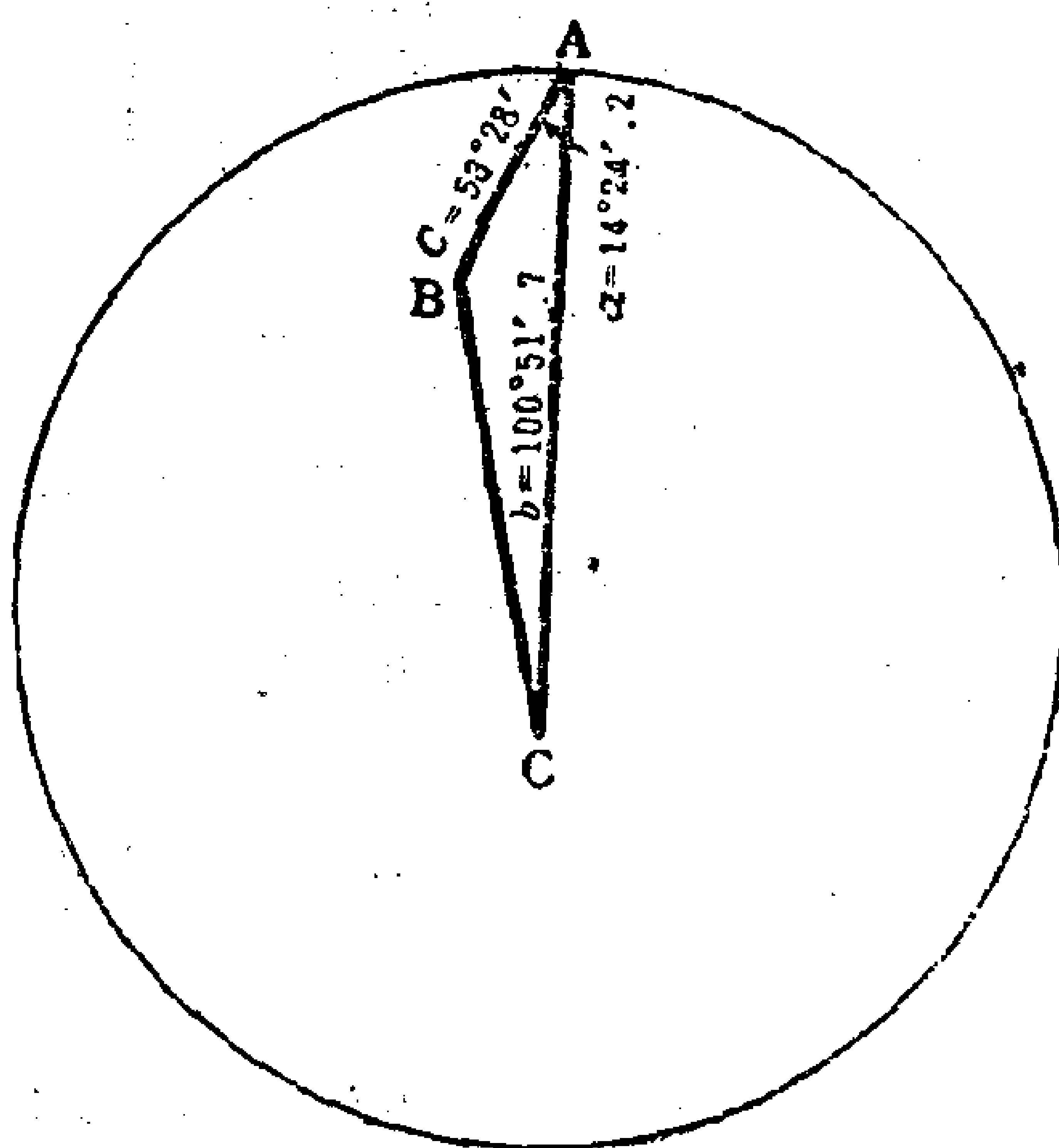
$A=14°24'.2$	$L\cos$ 9.98613			
$b=100°51'.7$	$L\operatorname{tg}$ 0.71698 n		$L\cos$ 9.27517 n	
$M_a=101°12'.3$	$L\operatorname{tg}$ 0.70311 n		$L\sec$ 0.71148 n	
$c=53°28'.0$				
$M_a-c=47°44'.3$			$L\cos$ 9.82771	
$a=49°17'.7$			$L\cos$ 9.81436	

本例題用“和差对数計算表”的計算如下：

由球面余弦公式(3)

$$\cos a=\overset{-}{\cos b}\cdot\overset{+}{\cos c}\cdot+\overset{+}{\sin b}\ \overset{+}{\sin c}\cdot\overset{+}{\cos A}=-\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

$A=14°24'.2$			$L\cos$	9.98613
$b=100°51'.7$	$L\cos$	9.27517 n	$L\sin$	9.99215
$c=53°28'.0$	$L\cos$	9.77473	$L\sin$	9.90499
		9.04990 n		9.88327
	$-\mathrm{I}+\mathrm{II}$	0.83337	β	9.93107
$a=49°17'.8$			$L\cos$	9.81434



（例題 8 附圖）

例題 9. 設球面三角形 ABC，$a=70°20'.8$，$b=38°28'.0$，$c=51°41'.2$，求 A 角的值。

解

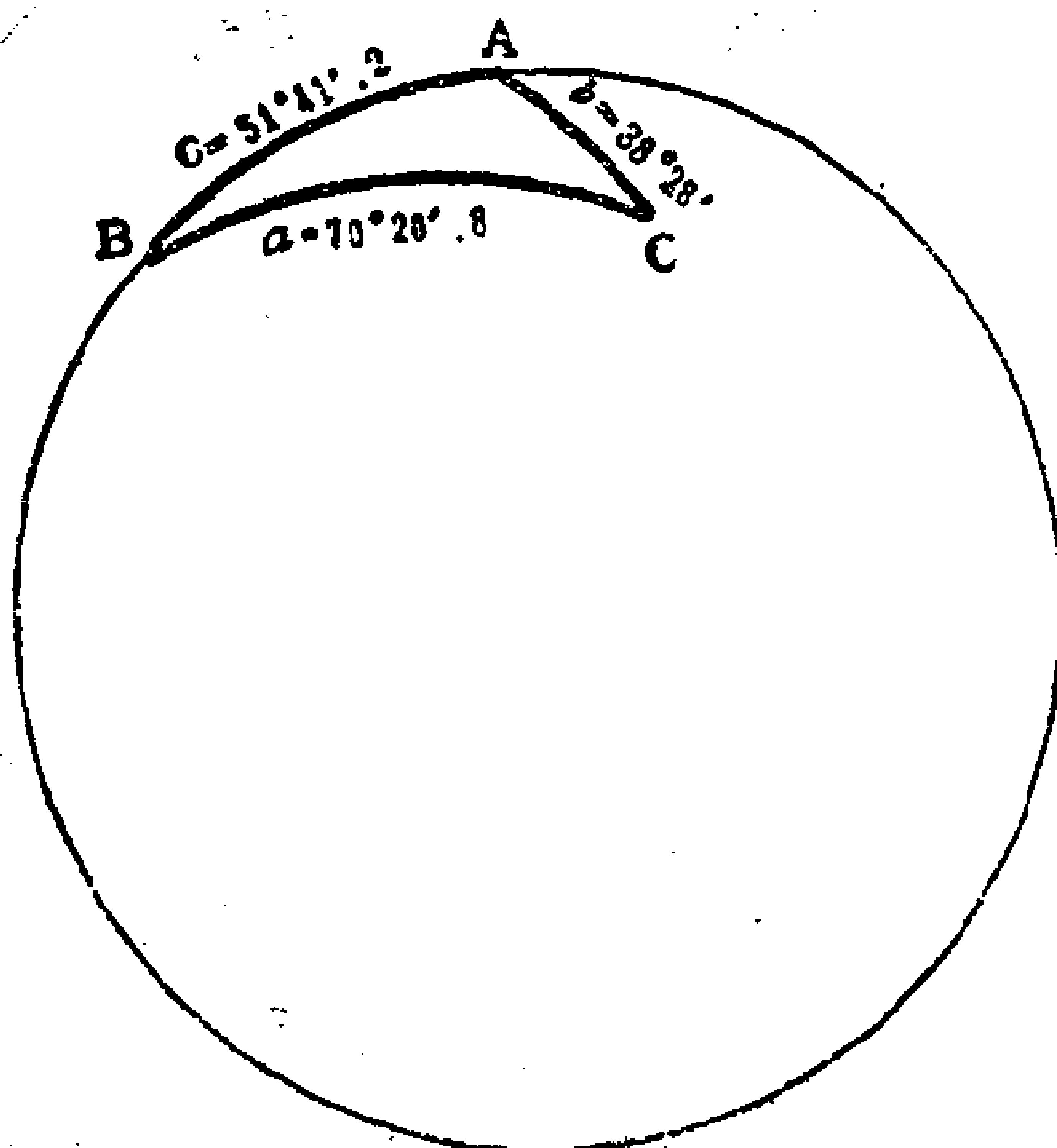
由球面余弦公式(3a) $\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$

命 $\operatorname{tg}M_A=\sec a\cdot\cos c\cdot\sin b$

于是 $\cos A=\operatorname{ctg}c\cdot\csc b\cdot\csc M_A\cdot\sin(b-M_A)$

$a=70°20'.8$			$L\sec$	0.47324
$c=51°41'.2$	$L\cos$	9.79237	$L\operatorname{ctg}$	9.89770
$b=38°28'.0$	$L\sin$	9.79383	$L\csc$	0.20617

$M_A=48°54'.5$	$L\,\text{tg}$	0.05944	$L\csc$	0.12282
$b-M_A=-10°26'.5$			$L\sin$	9.25824 n
$A=107°47'.1$			$L\cos$	9.48493 n



（例題9附圖）

本例題用"和差对数計算表"的計算如下：

由球面余弦公式(3a)

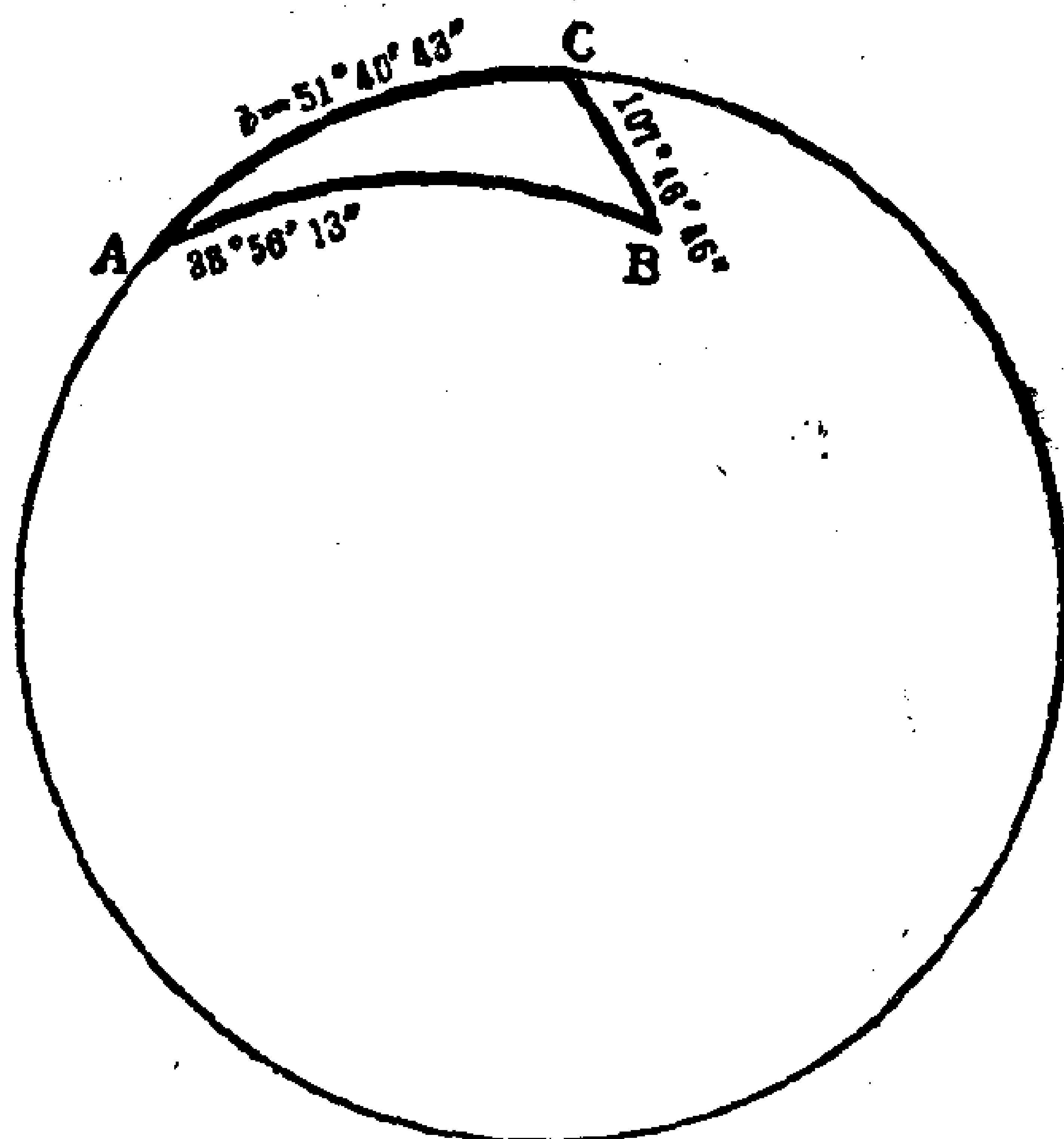
$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$$

即
$$\cos A=\overset{+}{\cos a}\cdot\overset{+}{\csc b}\cdot\overset{+}{\csc c}-\overset{+}{\text{ctg}\,b}\ \overset{+}{\text{ctg}\,c}=+\text{I}-\text{II}$$

$a=70°20'.8$	$L\cos$ 9.52676			
$b=38°28'.0$	$L\csc$ 0.20617		$L\,\text{ctg}$	0.09991
$c=51°41'.2$	$L\csc$ 0.10533		$L\,\text{ctg}$	9.89770
	9.83826			9.99761
	I−II 0.15935		β	9.48733 n
$A=107°47'.1$			$L\cos$	9.48494 n

例題 10. 設球面三角形 ABC，$A=38°56'13''$，$C=107°46'46''$，$b=51°40'43''$，求 B 角的值。

解



（例題 10 附圖）

由球面余弦公式(3b)　$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$

命　$\operatorname{tg} M_B = \sec b \cdot \operatorname{ctg} A$

于是　$\cos B = \cos A \ \operatorname{cso} M_B \cdot \sin(C - M_B)$

$b=51°40'53''$	L sec	0.20758		
$A=38°58'13''$	L ctg	0.09210	L cos	9.89069
$M_B=63°21'50''$	L tg	0.29968	L csc	0.04872
$C=107°46'46''$				
$C-M_B=44°24'56''$			L sin	9.84501
$B=52°30'10''$			L cos	9.78442

本例題用"和差对数計算表"的計算如下：

由球面余弦公式(3b)

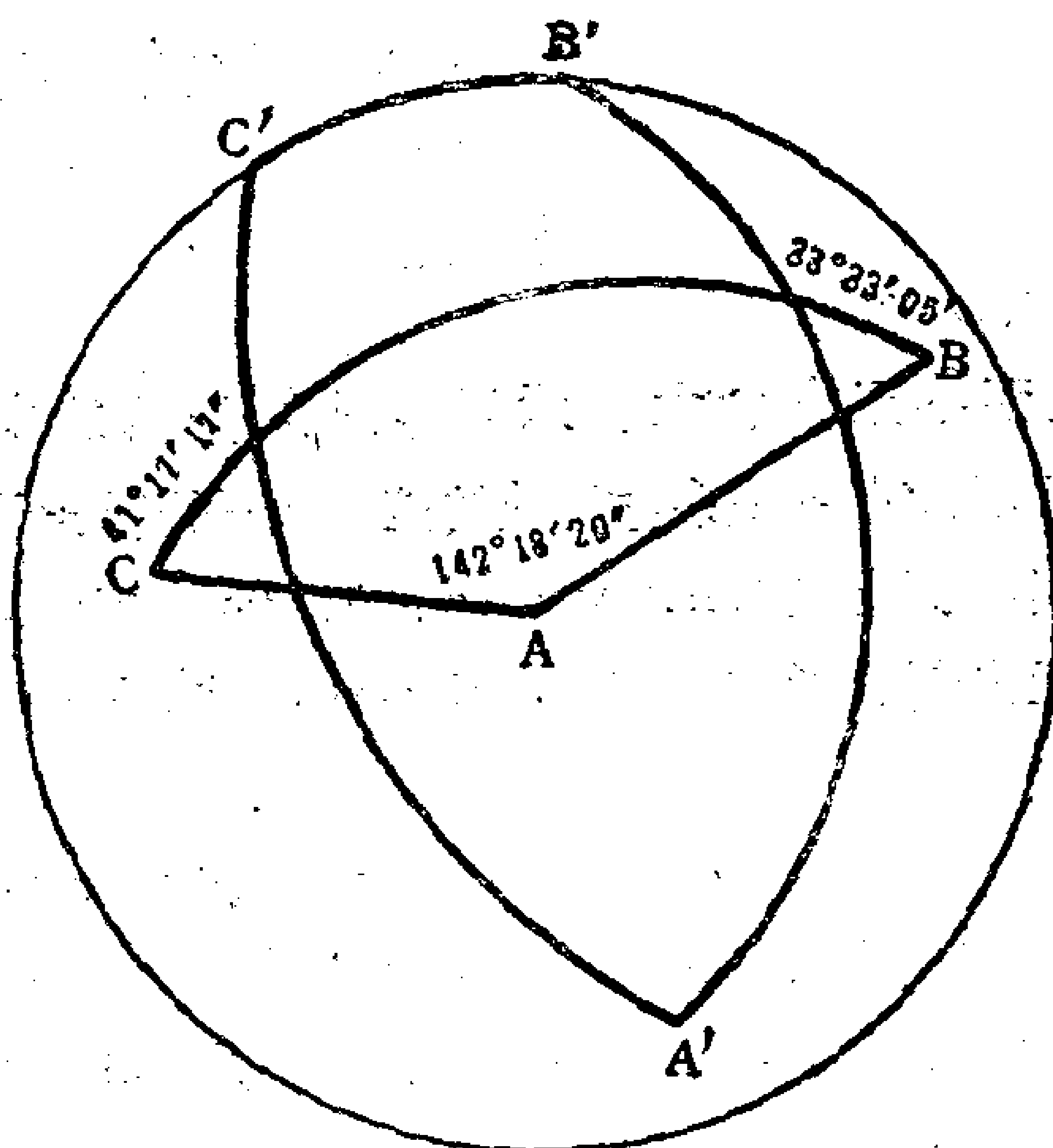
$$\cos B = -\overset{+}{\cos} A \cdot \overset{-}{\cos} C + \overset{+}{\sin} A \cdot \overset{+}{\sin} C \cdot \overset{+}{\cos} b = +\mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$b=51°40'53''$	L cos	9.79242		
$A=38°58'13''$	L sin	9.79859	L cos	9.89069
$C=107°46'46''$	L sin	9.97875	L cos	9.48480 n
		9.56976		9.37549 n

	α 0.21466	十I十II	0.19427
$B=52°30'10''$	$L\cos$ 9.78442		

例題 11. 設球面三角形 ABC，$A=142°18'20''$，$B=33°33'05''$，$C=41°17'17''$，求 c 边的值。

解



(例題 11 附圖)

由球面余弦公式(3c) $\cos c=\dfrac{\cos C+\cos A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B}$

命 $\operatorname{tg}M_c=\sec C\cdot\cos A\cdot\sin B$

于是 $\cos c=\operatorname{ctg}A\cdot\csc B\cdot\csc M_c\cdot\sin(B+M_c)$

$C=41°17'17''$	$L\sec$	0.12413		
$A=142°18'20''$	$L\cos$	9.89833 n	$L\operatorname{ctg}$	0.11197 n
$B=33°33'05''$	$L\sin$	9.74248	$L\csc$	0.25752
$M_c=149°47'58''$	$L\operatorname{tg}$	9.76494 n	$L\csc$	0.29841
$B+M_c=183°21'03''$			$L\sin$	8.76678 n
$c=74°12'45''$			$L\cos$	9.43468

本例題用"和差对数計算表"的計算如下：

由球面余弦公式(3c)

$$\cos c=\frac{\cos C+\cos A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B}$$

即 $$\cos c=\overset{+}{\cos} C\cdot\overset{+}{\csc} A\cdot\overset{+}{\csc} B+\overset{-}{\text{ctg}} A\cdot\overset{+}{\text{ctg}} B=+\text{I}-\text{II}$$

$C=41°17'17''$	$L\cos$ 9.87587			
$A=142°18'20''$	$L\csc$ 0.21364	$L\,\text{ctg}$	0.11197 n	
$B=33°33'05''$	$L\csc$ 0.25752	$L\,\text{ctg}$	0.17837	
	0.34703		0.29034 n	
	β 9.08769	$+\text{I}-\text{II}$	0.05669	
$c=74°12'40''$	$L\cos$ 9.43472			

4.5 球面半正矢公式、球面半正矢补角公式

正矢函数的定义是一与余弦函数的差，而正矢补角函数是一与余弦函数的和。故半正矢函数（Half-versine,简写 Hav.）为一与余弦函数的差的一半，而半正矢补角函数（Sub. haef-versine, 简写 Shav.）为一与余弦函数的和的一半，即

$$\text{Hav}\,a=\frac{1}{2}(1-\cos a)\qquad \text{Shav}\,a=\frac{1}{2}(1+\cos a)$$

$$\text{Hav}\,A=\frac{1}{2}(1-\cos A)\qquad \text{Shav}\,A=\frac{1}{2}(1+\cos A)$$

而 $\text{Hav}\,a=\frac{1}{2}(1-\cos a)=\frac{1}{2}[1+\cos(180°-a)]=\text{Shav}(180°-a)$

$\text{Hav}\,A=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}[1+\cos(180°-A)]=\text{Shav}(180°-A)$

或 $\text{Shav}\,a=\frac{1}{2}(1+\cos a)=\frac{1}{2}[1-\cos(180°-a)]=\text{Hav}(180°-a)$

$\text{Shav}\,A=\frac{1}{2}(1+\cos A)=\frac{1}{2}[1-\cos(180°-A)]=\text{Hav}(180°-A)$

今由球面余弦公式（3）已知

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

故
$$\begin{aligned}\text{Hav}\,a&=\frac{1}{2}[1-(\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A)]\\&=\frac{1}{2}[1-\cos b\cdot\cos c-\sin b\cdot\sin c(1-2\text{Hav}\,A)]\\&=\frac{1}{2}[1-\cos(b-c)+2\sin b\cdot\sin c\cdot\text{Hav}\,A]\\&=\text{Hav}(b-c)+\sin b\cdot\sin c\cdot\text{Hav}\,A\end{aligned}$$

故球面三角形边的半正矢公式为

$$\left.\begin{aligned}\text{Hav}\,a&=\text{Hav}(b-c)+\sin b\cdot\sin c\cdot\text{Hav}\,A\\\text{Hav}\,b&=\text{Hav}(a-c)+\sin a\cdot\sin c\cdot\text{Hav}\,B\\\text{Hav}\,c&=\text{Hav}(a-b)+\sin a\cdot\sin b\cdot\text{Hav}\,C\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

又
$$\operatorname{Shav} a=\tfrac{1}{2}(1+\cos a)$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A)$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+\cos b\cdot\cos c\cdot\Big(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\Big)+$$
$$+\sin b\cdot\sin c\Big(\cos^3\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\Big)\Big]$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big\{\cos^2\frac{A}{2}[1+\cos(b-c)]+\sin^2\frac{A}{2}[1+\cos(b+c)]\Big\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos A)\cdot\tfrac{1}{2}[1+\cos(b-c)]+\tfrac{1}{2}[1+\cos(180^\circ-A)]\cdot$$
$$\cdot\tfrac{1}{2}[1+\cos(b+c)]$$
$$=\operatorname{Shav}A\cdot\operatorname{Shav}(b-c)+\operatorname{Shav}(180^\circ-A)\cdot\operatorname{Shav}(b+c)$$

故球面三角形边的半正矢补角公式

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Shav}a&=\operatorname{Shav}A\cdot\operatorname{Shav}(b-c)+\operatorname{Shav}(180^\circ-A)\cdot\operatorname{Shav}(b+c)\\ \operatorname{Shav}b&=\operatorname{Shav}B\cdot\operatorname{Shav}(a-c)+\operatorname{Shav}(180^\circ-B)\cdot\operatorname{Shav}(a+c)\\ \operatorname{Shav}c&=\operatorname{Shav}C\cdot\operatorname{Shav}(a-b)+\operatorname{Shav}(180^\circ-C)\cdot\operatorname{Shav}(a+b)\end{aligned}\right\}(6)$$

今將球面三角形边的半正矢公式(5)移項之后，得

$$\operatorname{Hav}A=\frac{\operatorname{Hav}a-\operatorname{Hav}(b-c)}{\sin b\cdot\sin c}$$
$$\operatorname{Hav}B=\frac{\operatorname{Hav}b-\operatorname{Hav}(a-c)}{\sin a\cdot\sin c}$$
$$\operatorname{Hav}C=\frac{\operatorname{Hav}C-\operatorname{Hav}(a-b)}{\sin a\cdot\sin b}$$

但
$$\operatorname{Hav}a-\operatorname{Hav}(b-c)=\sqrt{\operatorname{Hav}(a+b-c)\cdot\operatorname{Hav}(a-b-c)}$$
$$\operatorname{Hav}b-\operatorname{Hav}(a-c)=\sqrt{\operatorname{Hav}(b+a-c)\cdot\operatorname{Hav}(b-a-c)}$$
$$\operatorname{Hav}c-\operatorname{Hav}(a-b)=\sqrt{\operatorname{Hav}(c+a-b)\cdot\operatorname{Hav}(c-a-b)}$$

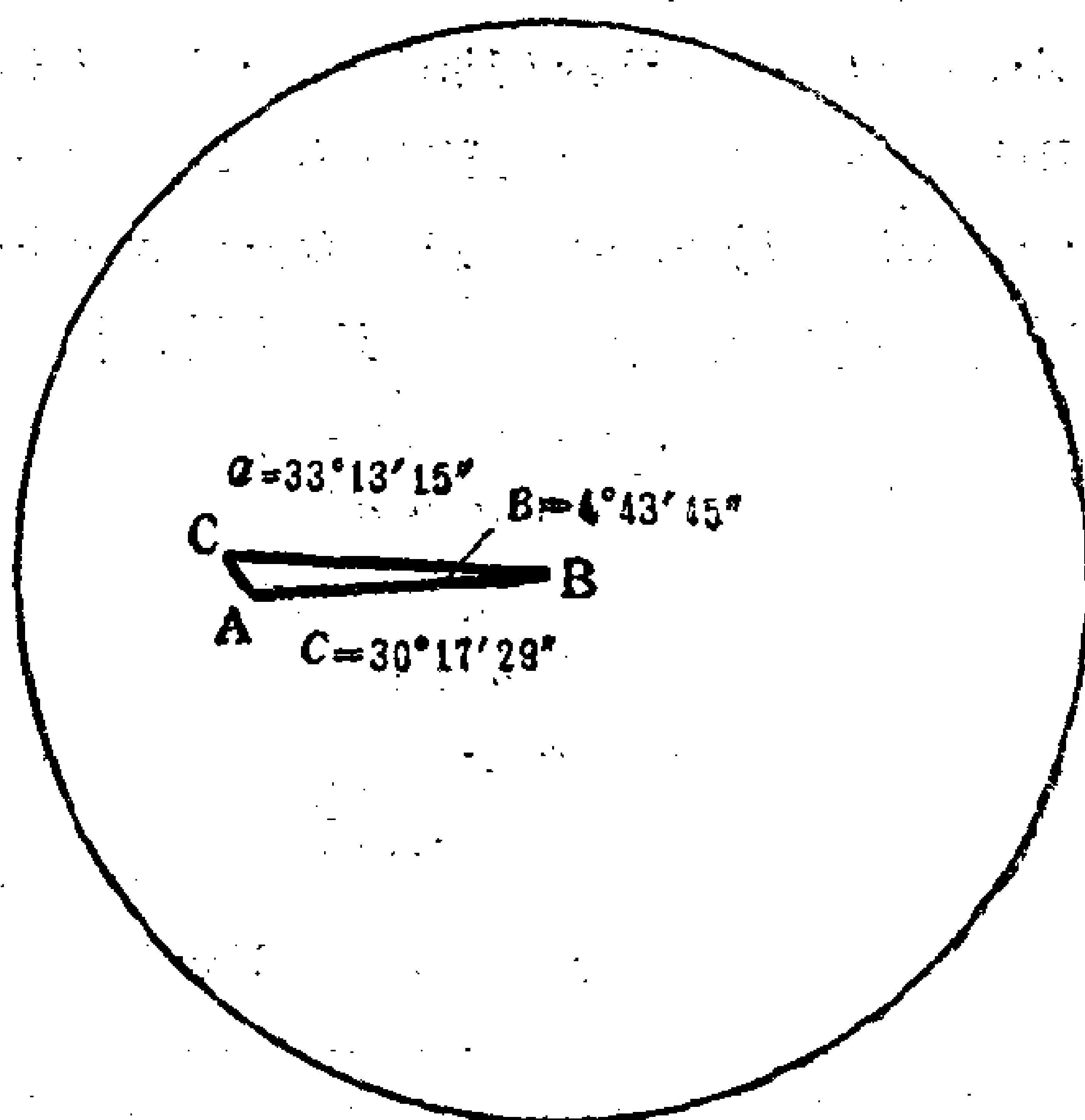
代入上式則得球面三角形角的半正矢公式

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Hav}A&=\csc b\cdot\csc c\cdot\sqrt{\operatorname{Hav}(a+b-c)\cdot\operatorname{Hav}(a-b-c)}\\ \operatorname{Hav}B&=\csc a\cdot\csc c\cdot\sqrt{\operatorname{Hav}(b+a-c)\cdot\operatorname{Hav}(b-a-c)}\\ \operatorname{Hav}C&=\csc a\cdot\csc b\cdot\sqrt{\operatorname{Hav}(c+a-b)\cdot\operatorname{Hav}(c-a-b)}\end{aligned}\right\}(7)$$

球面半正矢公式在航海的演算中是比較常見的，而球面半正矢补角公式則仅見于英国的航海教科書(Admiralty Navigation Manual)中。航海常用的对数表，如 **Inmau's** 对数表，**Norie's** 对数表等，均附印有半正矢函数表。表中列有半正矢函数 0°—180° 的对数值及其函数值，而 Inmau's 对数表更附有半正矢函数方根对数表。但半正矢函数值在 0°—8° 范圍之內，对数值在 172°—180° 范圍之內，数值变化緩慢，在此范圍之內，以半正矢函数定值，其結果幷不精确。下面的例題將証实这样的結論。

例題 12. 設球面三角形 ABC, $a=33°13'15''$, $c=30°17'29''$, $B=4°43'45''$，求 b 边的值。

解



(例題 12 附圖)

由球面半正矢公式(5)　$\text{Hav}\, b = \text{Hav}(a-c) + \sin a \cdot \sin c \cdot \text{Hav}\, B$

$B=4°43'45''$	L Hav 7.23102
$a=33°13'15''$	L sin 9.73868
$c=30°17'29''$	L sin 9.70278
	L Hav 6.67248
	N Hav 0.00047

$a-c=2^{\circ}55'46''$	N Hav 0.00066
$3^{\circ}51'00''<b<3^{\circ}51'30''$	N Hav 0.00113

本題亦可用球面半正矢补角公式求解。由公式(6)得

$$\text{Shav}\ b=\text{Shav}\ B\cdot\text{Shav}(a-c)+\text{Shav}(180^{\circ}-B)\cdot\text{Shav}(a+c)$$

$a=33^{\circ}13'15''$

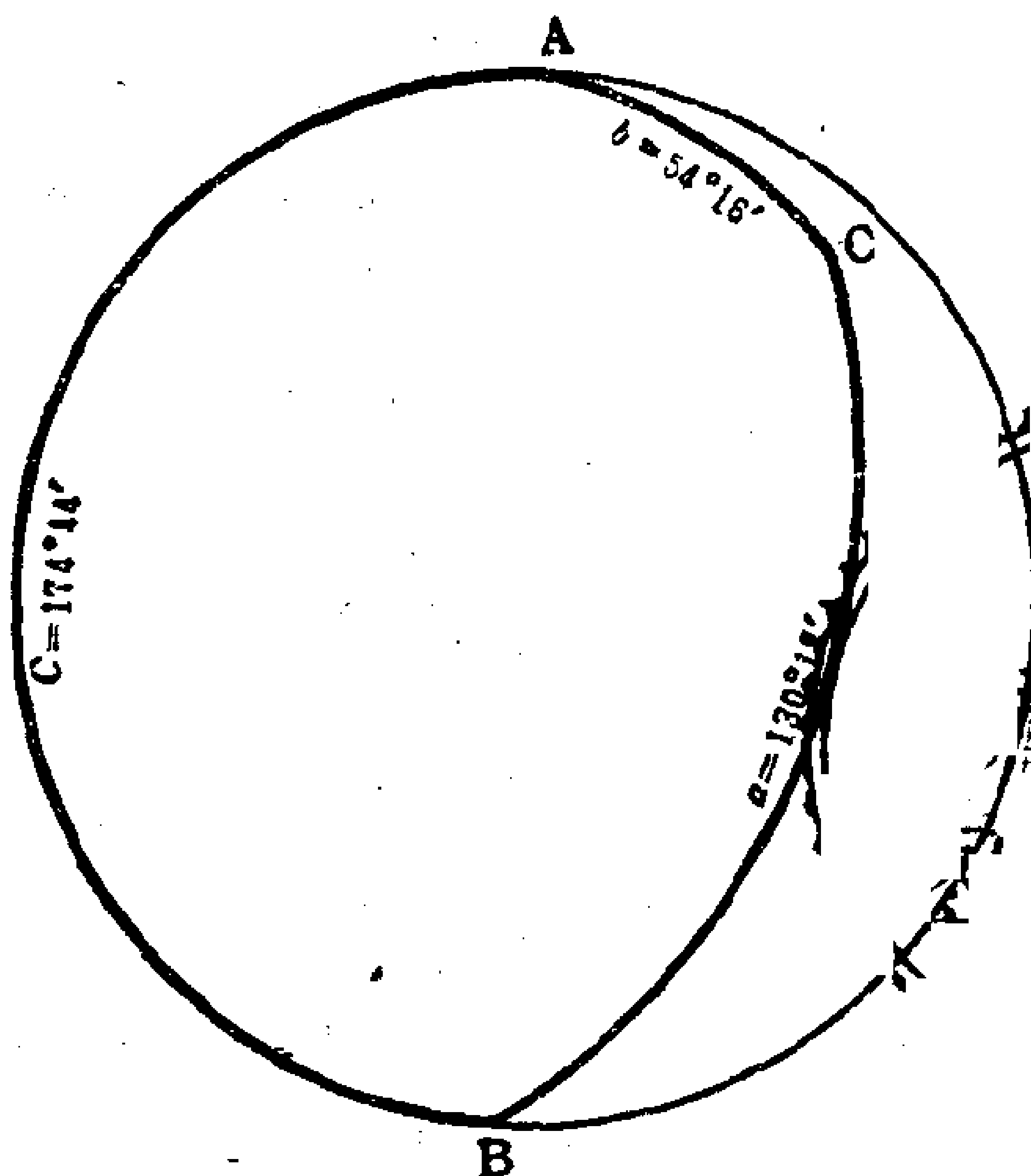
$c=30^{\circ}17'29''$

$a-c=2^{\circ}55'46''$	L Shav 9.99972	
$a+c=63^{\circ}30'44''$		L Shav 9.85914
$B=4^{\circ}43'45''$	L Shav 9.99926	
$180^{\circ}-B=175^{\circ}16'15''$		L Shav 7.23102
	L Shav 9.99898	L Shav 7.09016
	N Shav 0.99766	
	N Shav 0.00123	N Shav 0.00123
$b=3^{\circ}49'00''$	N Shav 0.99889	

註：由正切函数求得 b 的值应为 $3^{\circ}50'31.4''$

例題 13. 設球面三角形 ABC, $a=130^{\circ}12'$, $b=54^{\circ}16'$, $c=174^{\circ}44'$, 求 C 角的值。

解



(例題 13 附圖)

由球面半正矢公式(7)

$$\text{Hav } c = \csc a \cdot \csc b \cdot \sqrt{\text{Hav}(c+\overline{a-b}) \cdot \text{Hav}(c-\overline{a-b})}$$

$a=130°12'$	$L\csc 0.11702$
$b=54°16'$	$L\csc 0.09058$
$a-b=75°56'$	
$c=174°44'$	
$c+\overline{a-b}=250°40'$	$\frac{1}{2}L\text{Hav } 4.91158$
$c-\overline{a-b}=98°48'$	$\frac{1}{2}L\text{Hav } 4.88040$
$176°25'<C<176°27'$	$L\text{Hav } 9.99958$

註：由正切函数求得 C 的値应为 $176°27'27.8''$。

4.6 球面半角公式、球面半边公式

由球面余弦公式(3a)有

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

但
$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

故
$$\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}$$

即
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

命
$$\frac{1}{2}(a+b+c) = p$$

于是
$$\frac{1}{2}(b+c-a) = (p-a) = p_a,\ \frac{1}{2}(a-b+c) = (p-b) = p_b,$$
$$\frac{1}{2}(a+b-c) = (p-c) = p_c$$

代入上式則得球面半角正弦公式

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin b\cdot\sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin a\cdot\sin c}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b}{\sin a\cdot\sin b}}\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

同理

由于球面三角形的每一个角皆小于 180° 而大于 0°，故半角的正弦函数恒为正値，公式的根号前为正号。

又 $$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

故 $$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\cdot\sin c}$$

即 $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

令

$\frac{1}{2}(a+b+c)=p,\ \frac{1}{2}(b+c-a)=p_a,\ \frac{1}{2}(a-b+c)=p_b,\ \frac{1}{2}(a+b-c)=p_c$

代入上式则得球面半角余弦公式

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_a}{\sin b\cdot\sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_b}{\sin a\cdot\sin c}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_c}{\sin a\cdot\sin b}}\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

同理

由于半角的余弦函数为正値，故公式的根号前为正号。

又 $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

而 $$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$$

故 $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\cdot\sin c-\cos a+\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c+\cos a-\cos b\cdot\cos c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)+\cos a}{\cos a-\cos(b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

今

$\frac{1}{2}(a+b+c)=p, \frac{1}{2}(b+c-a)=p_a, \frac{1}{2}(a-b+c)=p_b, \frac{1}{2}(a+b-c)=p_c$

代入上式則得**球面半角正切公式**

同理
$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_a}}\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_b}}\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b}{\sin p\cdot\sin p_c}}\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

由于半角的正切函数为正値，故公式的根号前为正号。

今以極綫三角形的关系代入公式(8)—(10)，并命 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$，$P_A=\frac{1}{2}(B+C-A)$，$P_B=\frac{1}{2}(A-B+C)$，$P_C=\frac{1}{2}(A+B-C)$，于是得

球面半边正弦公式

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_A}{\sin B\cdot\sin C}}\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_B}{\sin A\cdot\sin C}}\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_C}{\sin A\cdot\sin B}}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

球面半边余弦公式

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos P_B\cdot\cos P_C}{\sin B\cdot\sin C}}\\\cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos P_A\cdot\cos P_C}{\sin A\cdot\sin C}}\\\cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos P_A\cdot\cos P_B}{\sin A\cdot\sin B}}\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

球面半边正切公式

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_A}{\cos P_B\cdot\cos P_C}}\\\mathrm{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_B}{\cos P_A\cdot\cos P_C}}\\\mathrm{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_C}{\cos P_A\cdot\cos P_B}}\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

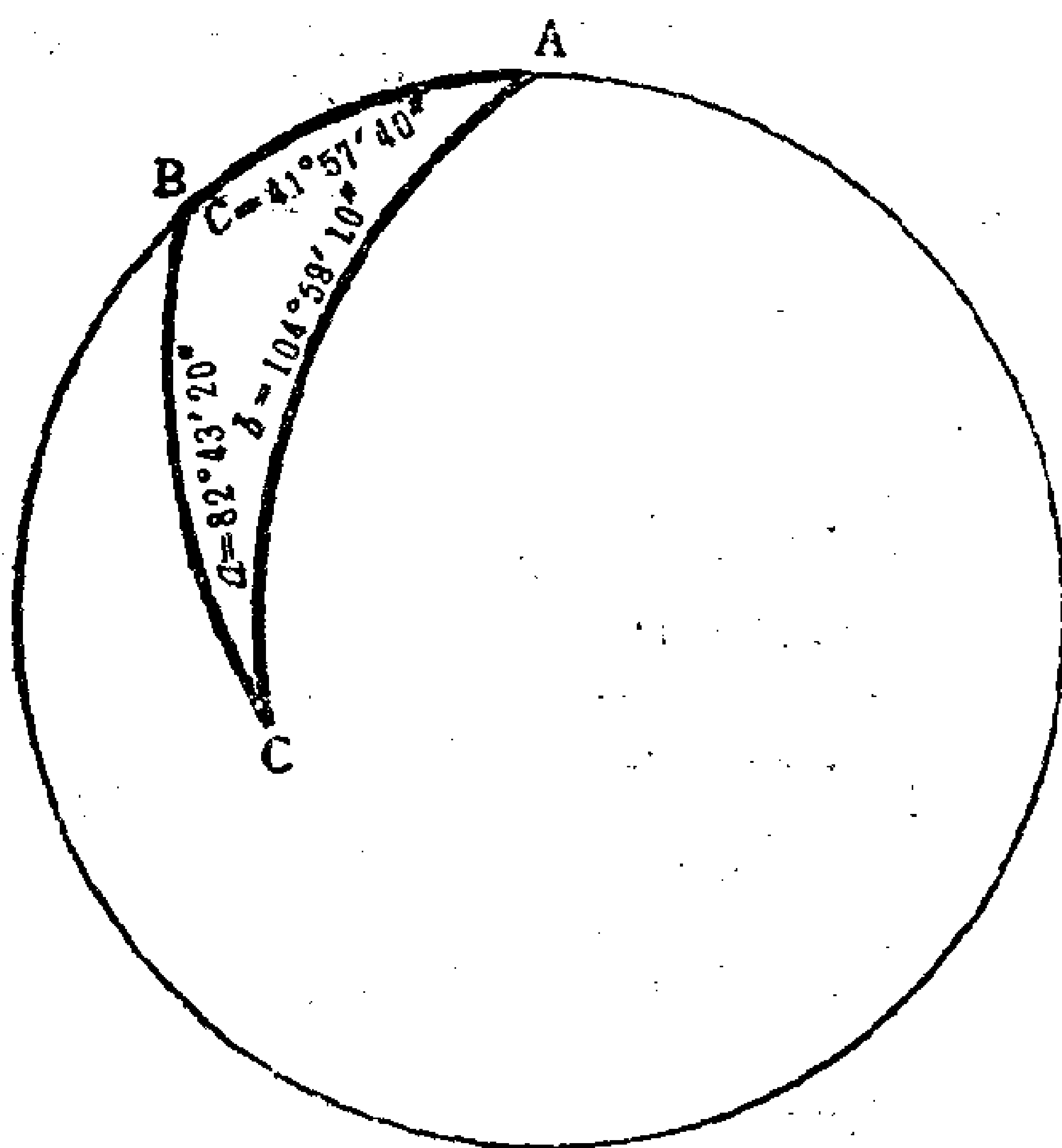
由于球面三角形的每一个边皆小于 $180°$ 而大于 $0°$，故半边的正弦，余弦及正切等函数皆为正值，公式的根号前为正号。

球面半边公式可以用球面角盈 E 表示。球面角盈 $E=A+B+C-180°$(2.4d)，故$P=90°+\frac{E}{2}$，$P_A=90°-\left(A-\frac{E}{2}\right)$，$P_B=90°-\left(B-\frac{E}{2}\right)$，$P_C=90°-\left(C-\frac{E}{2}\right)$。將这些关系代入球面半边公式(11)—(13)則得

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}}\\\sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin C}}\\\sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin B}}\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}}\\\cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin C}}\\\cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin B}}\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}\\\operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}\\\operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}}\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$



（例題14附圖）

例題 14. 設球面三角形 ABC，$a=82°43'20''$，$b=104°59'10''$，$c=41°57'40''$，求該球面三角形各角的值。

解 由于余弦函数所定的接近于0°的値及正弦函数所定的接近于90°的値不能精确，因此，以正切函数定値，就整个情况而言，是較为理想的。本題用球面半角正切公式(10)的解法如下：

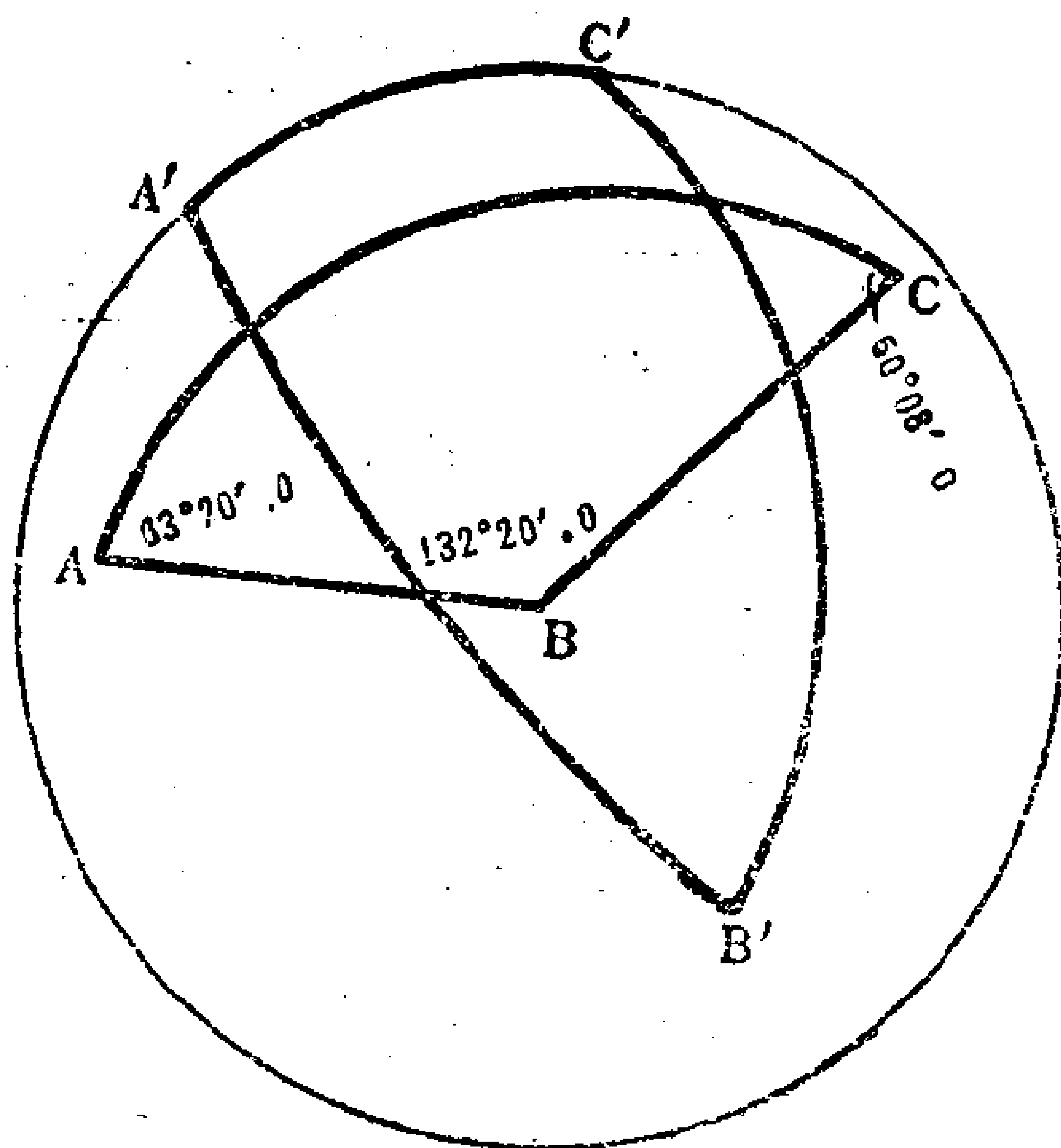
$a=\ 82°43'20''$

$b=104°59'10''$

$c=\ 41°57'40''$

$2P=229°40'10''$			
$P=114°50'05''$	$L\csc\ 0.04215$	$L\csc\ 0.04215$	$L\csc\ 0.04215$
$P_a=\ 32°06'45''$	$L\csc\ 0.27443$	$L\sin\ 9.72557$	$L\sin\ 9.72557$
$P_b=\ \ 9°50'55''$	$L\sin\ 9.23311$	$L\csc\ 0.76689$	$L\sin\ 9.23311$
$P_c=\ 72°52'25''$	$L\sin\ 9.98031$	$L\sin\ 9.98031$	$L\csc\ 0.01969$
	$2L\,\mathrm{tg}\ 19.53000$	$2L\,\mathrm{tg}\ 20.51492$	$2L\,\mathrm{tg}\ 19.02052$
	$L\,\mathrm{tg}\ 9.76500$	$L\,\mathrm{tg}\ 10.25746$	$L\,\mathrm{tg}\ 9.51026$
	$\frac{A}{2}=30°12'15''$	$\frac{B}{2}=61°04'04''$	$\frac{C}{2}=17°56'30''$
	$A=60°24'30''$	$B=122°08'08''$	$C=35°53'00''$

題例 15. 設球面三角形 ABC, $A=63°20.'0$, $B=132°20.'0$, $C=50°08.'0$, 求該球面三角形各边的值。



(例題 15 附圖)

解　采用球面半边正切公式(16)的解法如下:

$A=\ 63°20.'0$

$B=132°20.'0$

$C=\ 50°08.'0$

$2P=245°48.'0$

$E = 65°48.'0$

$\frac{E}{2} = 32°54.'0$	$L\sin$ 9.73494	$L\sin$ 9.73494	$L\sin$ 9.73494
$A - \frac{E}{2} = 30°26.'0$	$L\sin$ 9.70461	$L\csc$ 0.29539	$L\csc$ 0.29539
$B - \frac{E}{2} = 99°26.'0$	$L\csc$ 0.00591	$L\sin$ 9.99409	$L\csc$ 0.00591
$C - \frac{E}{2} = 17°14.'0$	$L\csc$ 0.52832	$L\csc$ 0.52832	$L\sin$ 9.47168
	$2L\,\mathrm{tg}$ 19.97378	$2L\,\mathrm{tg}$ 20.55274	$2L\,\mathrm{tg}$ 19.50792
	$L\,\mathrm{tg}$ 9.98689	$L\,\mathrm{tg}$ 10.27637	$L\,\mathrm{tg}$ 9.75396
	$\frac{a}{2} = 44°08.'1$	$\frac{b}{2} = 62°06.'7$	$\frac{c}{2} = 29°34.'5$
	$a = 88°16.'2$	$b = 124°13.'4$	$c = 59°09.'0$

4.7 德朗布尔方程式、讷比尔相似方程式

由公式(8)得

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin b\cdot\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$= \sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin p_c}{\sin c} \qquad (\text{I})$$

由公式(9)得

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_a}{\sin b\cdot\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_b}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$= \sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin p}{\sin c} \qquad (\text{II})$$

由公式(8)及(9)得

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin p_c}{\mathrm{Sin} c} \qquad (\text{III})$$

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin p_a}{\sin c} \qquad (\text{IV})$$

(Ⅰ)+(Ⅱ)，并化簡得

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

(Ⅱ)−(Ⅰ)，并化簡得

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

(Ⅲ)−(Ⅳ)，并化簡得

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

(Ⅲ)+(Ⅳ)，并化簡得

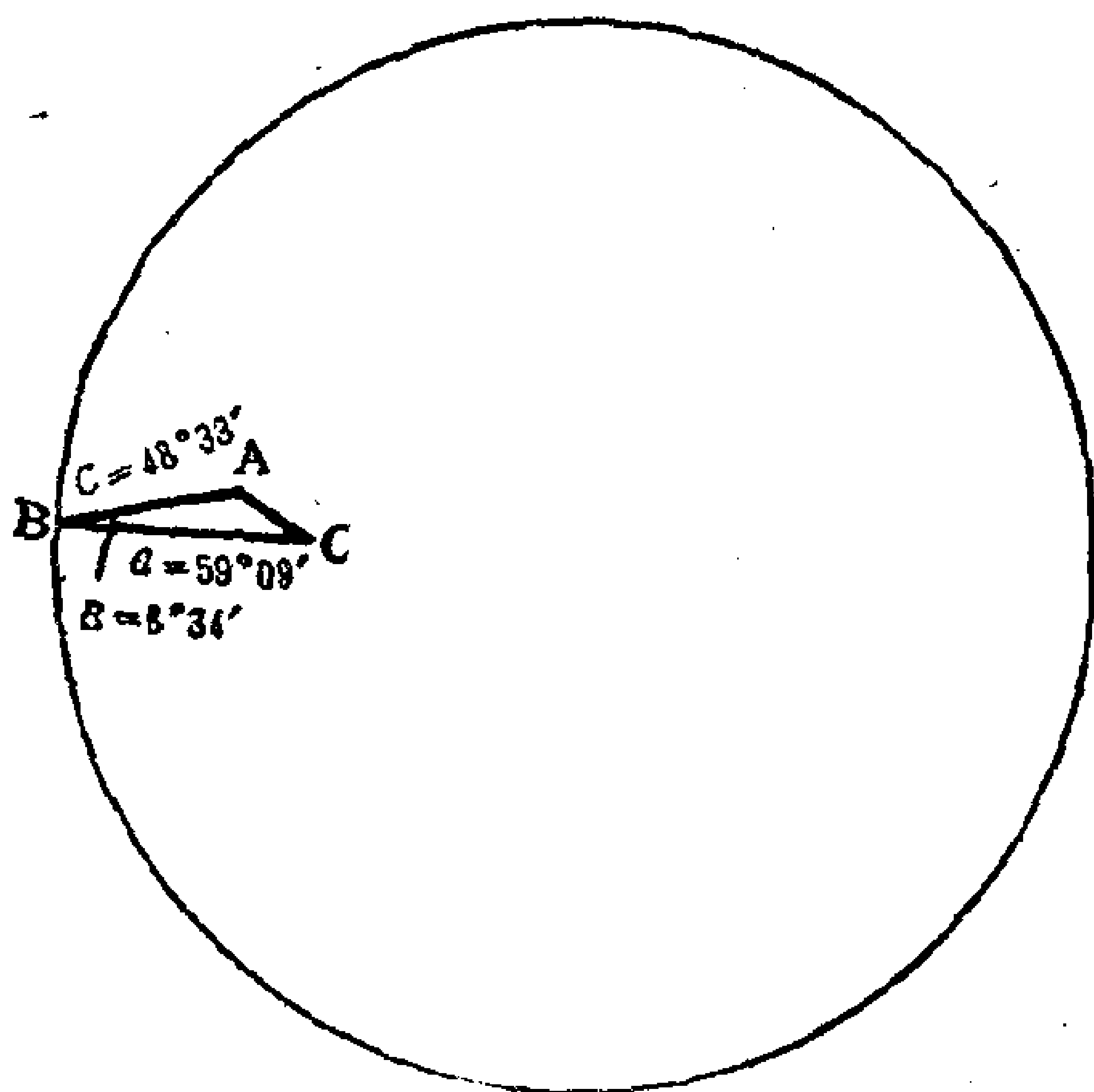
$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2} \qquad (17)$$

公式(17)叫作**德朗布尔方程式** (Delambre's Analogies)。今以公式(17)中的任意一个方程式除另一方程式，则得**訥比尔相似方程式** (Napier's Analogies)：

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

显然，用訥比尔相似方程式解已知二边及其夾角，或二角及其夾边的球面三角形时，因为是由正切函数定値，所以結果是精确的。

例題 16. 設球面三角形 ABC, $a=59°09'$, $c=48°33'$, $B=8°34'$, 解該球面三角形.



(例題16附圖)

解 由訥比尔相似方程式(18)有

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C)=\cos\tfrac{1}{2}(a-c)\cdot\sec\tfrac{1}{2}(a+c)\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C)=\sin\tfrac{1}{2}(a-c)\cdot\csc\tfrac{1}{2}(a+c)\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-c)\cdot\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C)$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(A+C)\cdot\csc\tfrac{1}{2}(A-C)\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-c)$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\cos\tfrac{1}{2}(A+C)\sec\tfrac{1}{2}(A-C)\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+c)$$

$$a=59°09' \qquad \frac{a}{2}=29°34.'5$$

$$c=48°33' \qquad \frac{c}{2}=24°16.'5$$

$\frac{1}{2}(a-c)=$	$5°18.'0$	$L\cos 9.99814$	$L\sin 8.96553$	$L\operatorname{tg} 8.96739$	$L\operatorname{tg} 8.96739$
$\frac{1}{2}(a+c)=$	$53°51.'0$	$L\sec 0.22922$	$L\csc 0.09287$	$L\operatorname{ctg} 9.86365$	$L\operatorname{tg} 0.13635$
$B=8°34'$	$\frac{B}{2}=4°17.'0$		$L\operatorname{ctg} 1.12553$	$L\operatorname{ctg} 1.12553$	

$A=144°14.'7$ $\frac{1}{2}(A+C)=87°27.'6$ $L\,tg\,1.35289$ $L\,tg\,1.35289$ $L\sin 9.99958$

$L\cos 8.64669$

$C=30°40.'5$ $\frac{1}{2}(A-C)=56°47.'1$ $L\,tg\,0.18393$ $L\,tg\,0.18393$ $L\csc 0.07747$

$L\sec 0.26139$

$b=12°38.'6$ $\frac{b}{2}=6°19.'3$ $L\,tg\,9.04444$ $L\,tg\,9.04443$

§5. 球面直角三角形、球面直边三角形

5.1 球面直角三角形公式

根据球面几何关于球面三角形的定义，凡有一个角为 90° 的球面三角形，就叫作球面直角三角形。設球面直角三角形 ABC，$C=90°$，于是 $\sin C=1$，$\cos C=0$。將这样的关系代入前节所証明的球面任意三角形各公式，則那些公式就成为适合于 C 角为 90° 的球面直角三角形的公式了。

球面任意三角形公式	球面直角三角形公式 $C=90°$
$\sin a\cdot\sin B=\sin b\cdot\sin A$	$\sin a\cdot\sin B=\sin b\cdot\sin A$
$\sin a\cdot\sin C=\sin c\cdot\sin A$	$\sin a=\sin c\cdot\sin A$
$\sin b\cdot\sin C=\sin c\cdot\sin B$	$\sin b=\sin c\cdot\sin B$
$\sin a\cdot\cos C=\cos c\cdot\sin b-\sin c\cdot\cos b\cdot\cos A$	$\cos A=tg\,b\cdot tg\,c$
$\sin b\cdot\cos C=\cos c\cdot\sin a-\sin c\cdot\cos a\cdot\cos B$	$\cos B=tg\,a\cdot tg\,c$
$\sin c\cdot\cos A=\cos a\cdot\sin b-\sin a\cdot\cos b\cdot\cos C$	$\sin c\cdot\cos A=\sin b\cdot\cos a$
$\sin c\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin a-\sin b\cdot\cos a\cdot\cos C$	$\sin c\cdot\cos B=\sin a\cdot\cos b$
$\sin A\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin C+\sin B\cdot\cos C\cdot\cos a$	$\cos B=\sin A\cdot\cos b$
$\sin A\cdot\cos c=\cos C\cdot\sin B+\sin C\cdot\cos B\cdot\cos a$	$\sin A\cdot\cos c=\cos B\cdot\cos a$
$\sin B\cdot\cos a=\cos A\cdot\sin C+\sin A\cdot\cos C\cdot\cos b$	$\cos A=\sin B\cdot\cos a$
$\sin B\cdot\cos c=\cos C\cdot\sin A+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos b$	$\sin B\cdot\cos c=\cos A\cdot\cos b$
$ctg\,a\cdot\sin b=ctg\,A\cdot\sin C+\cos C\cdot\cos b$	$\sin b=ctg\,A\cdot tg\,a$
$ctg\,b\cdot\sin a=ctg\,B\cdot\sin C+\cos C\cdot\cos a$	$\sin a=ctg\,B\cdot tg\,b$
$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C$	$\cos c=\cos a\cdot\cos b$
$\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos c$	$\cos c=ctg\,A\cdot ctg\,B$

上表所列的是 C 为 90° 的球面直角三角形各有关公式。这些公式也可以按訥比尔法则（Napier's Rules）及作者所补充的**球面直角三角形四联关系式法则**直接写出来。首先在紙上作一个"大"圖形（圖 15），然后把球面直角三角形相鄰于直角的二边分别写在圖形上部的兩空格内，其余的二角及直角所对的边則以其与 90° 的差，順序写在圖形下部的空格內。

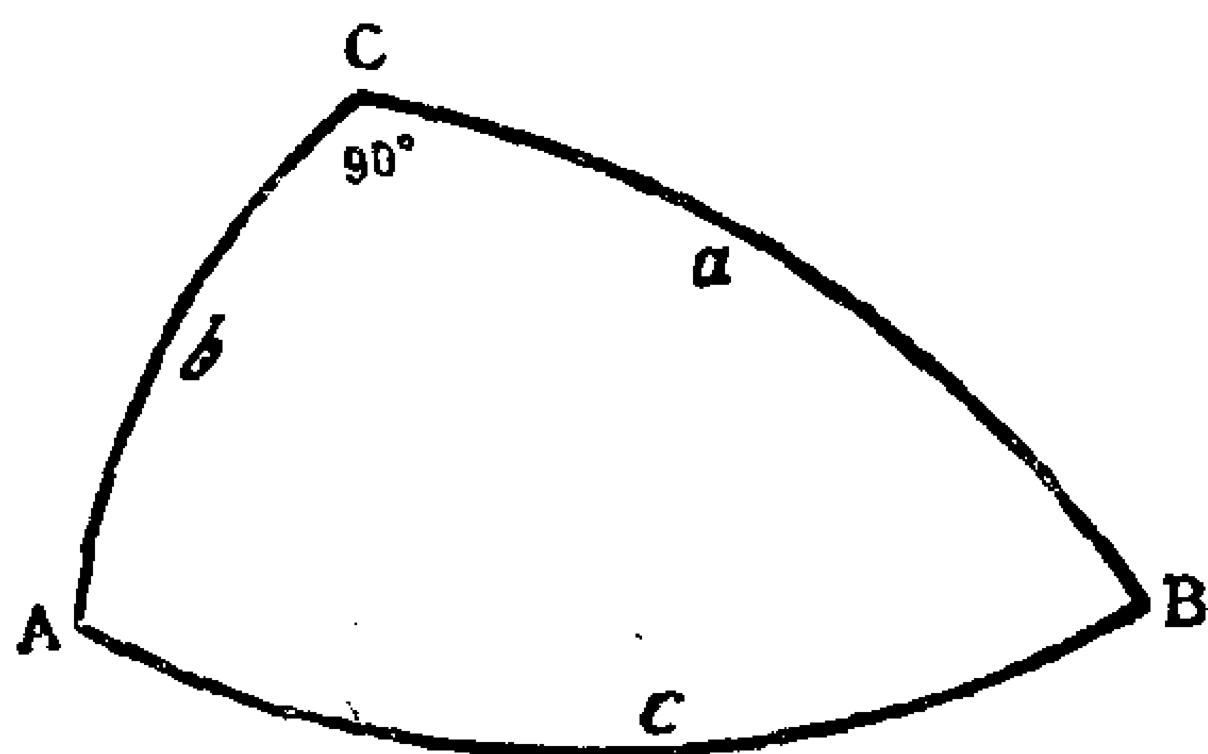
法則Ⅰ　任一要素的正弦，等于相鄰二要素正切的乘积，或等于相对二要素余弦的乘积。

法則Ⅱ　任意四个相联的要素，一端要素余弦与其相鄰要素正弦的乘积，等于另端要素余弦与其相鄰要素正弦的乘积。

根据上述兩个法則写出的 C 为 90° 的球面直角三角形 ABC 的各公式，是和从球面任意三角形各公式所导出的一样。

根据法則写出的公式 C=90°	球面直角三角形公式 C=90°
$\sin a=\cos(90°-A)\cdot\cos(90°-C)$	$\sin a=\sin A\cdot\sin C$
$\sin a=\mathrm{tg}(90°-B)\cdot\mathrm{tg}b$	$\sin a=\mathrm{ctg}B\cdot\mathrm{tg}b$
$\sin b=\cos(90°-B)\cdot\cos(90°-C)$	$\sin b=\sin B\cdot\sin c$
$\sin b=\mathrm{tg}(90°-A)\cdot\mathrm{tg}a$	$\sin b=\mathrm{ctg}A\cdot\mathrm{tg}a$
$\sin(90°-C)=\cos a\cdot\cos b$	$\cos c=\cos a\cdot\cos b$
$\sin(90°-C)=\mathrm{tg}(90°-A)\cdot\mathrm{tg}(90°-B)$	$\cos c=\mathrm{ctg}A\cdot\mathrm{ctg}B$
$\sin(90°-A)=\cos(90°-B)\cdot\cos a$	$\cos A=\sin B\cdot\cos a$
$\sin(90°-A)=\mathrm{tg}b\cdot\mathrm{ctg}c$	$\cos A=\mathrm{tg}b\cdot\mathrm{ctg}c$
$\sin(90°-B)=\cos(90°-A)\cdot\cos b$	$\cos B=\sin A\cdot\cos b$
$\sin(90°-B)=\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{tg}(90°-C)$	$\cos B=\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{ctg}c$
$\cos a\cdot\sin b=\cos(90°-C)\cdot\sin(90°-A)$	$\cos a\cdot\sin b=\sin C\cdot\cos A$
$\cos b\cdot\sin(90°-A)=\cos(90°-B)\cdot\sin(90°-C)$	$\cos b\cdot\cos A=\sin B\cdot\cos C$
$\cos(90°-A)\cdot\sin(90°-C)=\cos a\cdot\sin(90°-B)$	$\sin A\cdot\cos C=\cos a\cdot\cos B$
$\cos(90°-C)\cdot\sin(90°-B)=\cos b\cdot\sin a$	$\sin C\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin a$
$\cos(90°-B)\cdot\sin a=\cos(90°-A)\cdot\sin b$	$\sin B\cdot\sin a=\sin A\cdot\sin b$

实际的应用中，沒有必要写出所有的公式，只要根据已知的要素，按法則写出含有所求的要素的公式便可。例如球面直角三角形 ABC，



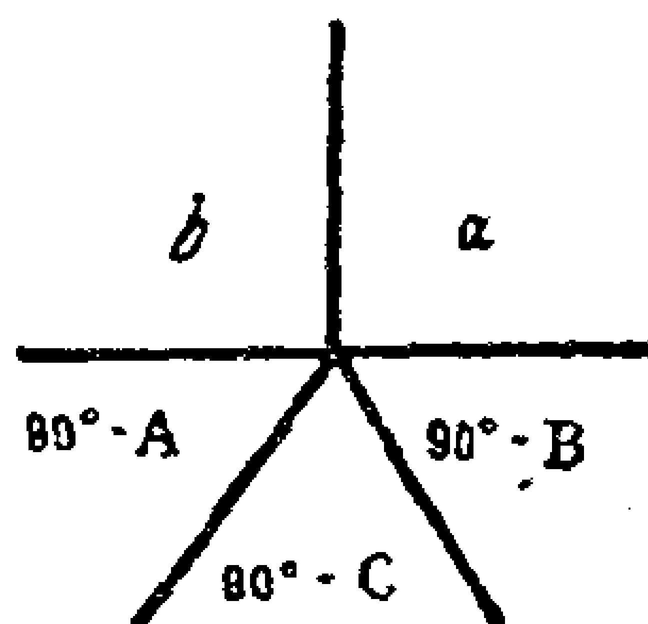
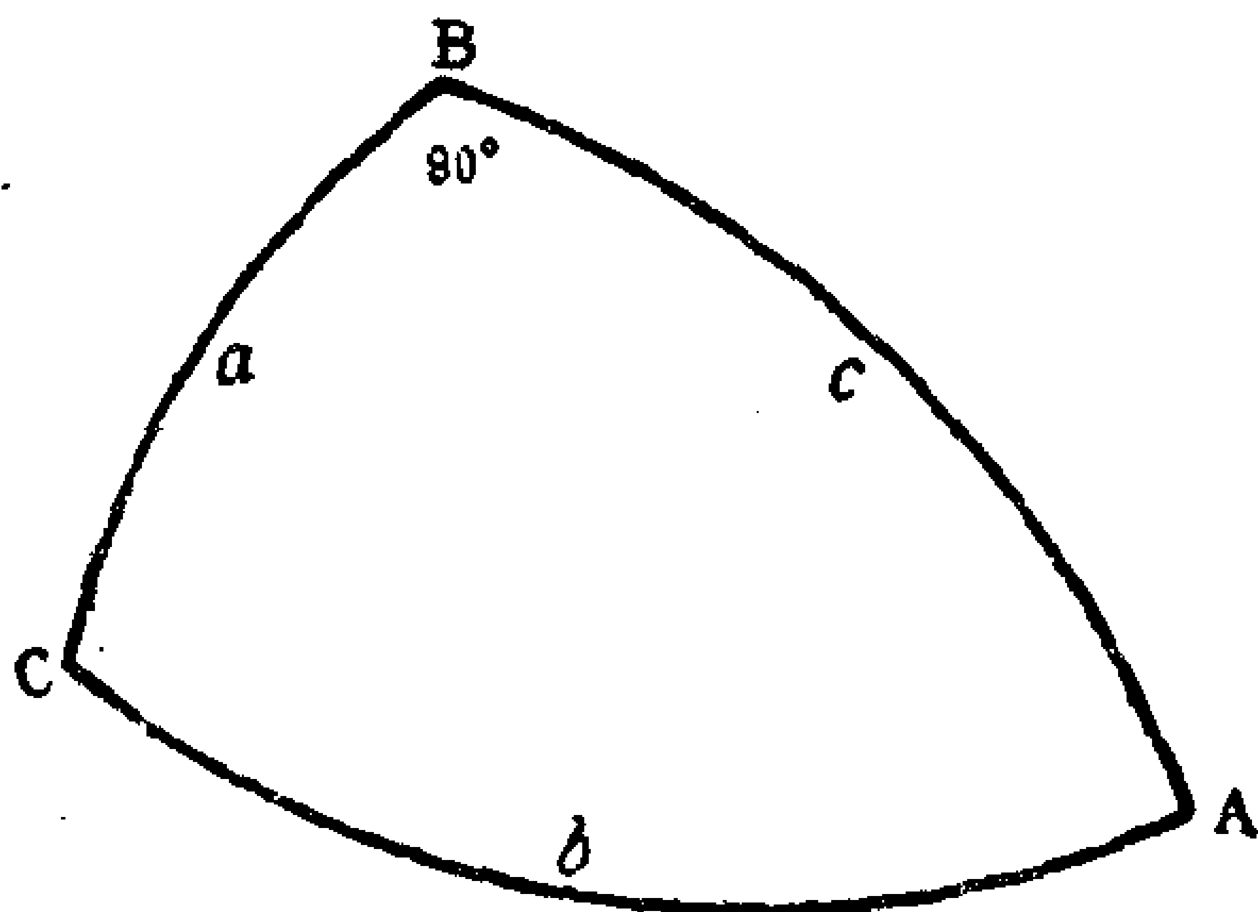


圖 15

$B=90°$，已知 a 及 C，求 A 角并写出 A 与三个边的关系。

首先作一大一圖形（圖 16），在空格中按法則的規定順序列入各要素。



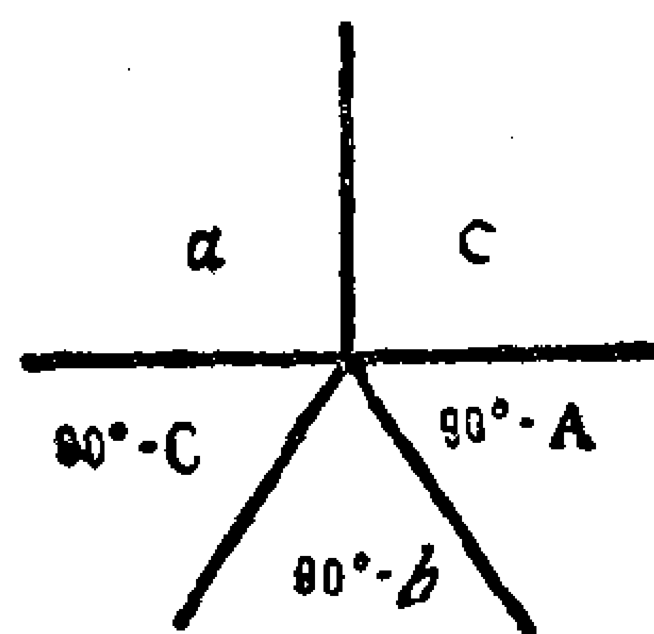


圖 16

然后根据法則得

$\sin(90°-A)=\cos a\cdot\cos(90°-C)$ 即 $\cos A=\cos a\cdot\sin C$

$\cos a\cdot\sin c=\cos(90°-b)\cdot\sin(90°-A)$ 即 $\cos A=\cos a\cdot\csc b\cdot\sin c$

5.2 球面直角三角形各要素的关系

球面直角三角形的要素間的关系，虽然沒有平面直角三角形那样單純，但也不是完全沒有規律可以掌握。我們可以从球面直角三角形的公式的分析，得出这些要素彼此間的关系。

設球面直角三角形 ABC，$C=90°$，根据法則得

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b$$

当 $C<90°$，$\cos c$ 为正值，即 $\cos a\cdot\cos b$ 的积必为正值，这只有当 a 与 b 位于同一象限时，才有可能；若 $C>90°$，$\cos c$ 为負值，即 $\cos a, \cos b$ 的积必为負值，那么，a 与 b 就要位于不同的象限。我們可將以上情况归納如下表：

c	$<90°$	$<90°$	$>90°$	$>90°$
a	$<90°$	$>90°$	$<90°$	$>90°$
b	$<90°$	$>90°$	$>90°$	$<90°$

由这个表可以清楚地看出球面直角三角形要素間的第一个关系是：

对直角的边小于 90°，則其他二边位于同一象限；对直角的边大于 90°，則其他二边位于不同象限。

根据法則，又可有公式

$$\cos A=\sin B\cdot\cos a$$

由于 B 小于 180° 而大于 0°，因此 $\sin B$ 恒为正值且小于 1，这样就使式中的 $\cos A$ 与 $\cos a$ 必須是同号且 $\cos A$ 必小于 $\cos a$，故

$$a\leqslant A<90°$$

$$a\geqslant A>90°$$

同理

$$b\leqslant B<90°$$

$$b\geqslant B>90°$$

所以球面直角三角形要素間的第二个关系是：

直角的隣边与其所对的角，恒位于同一象限；角小于 90°，則边小于或等于所对的角，角大于 90°，則边大于或等于所对的角。

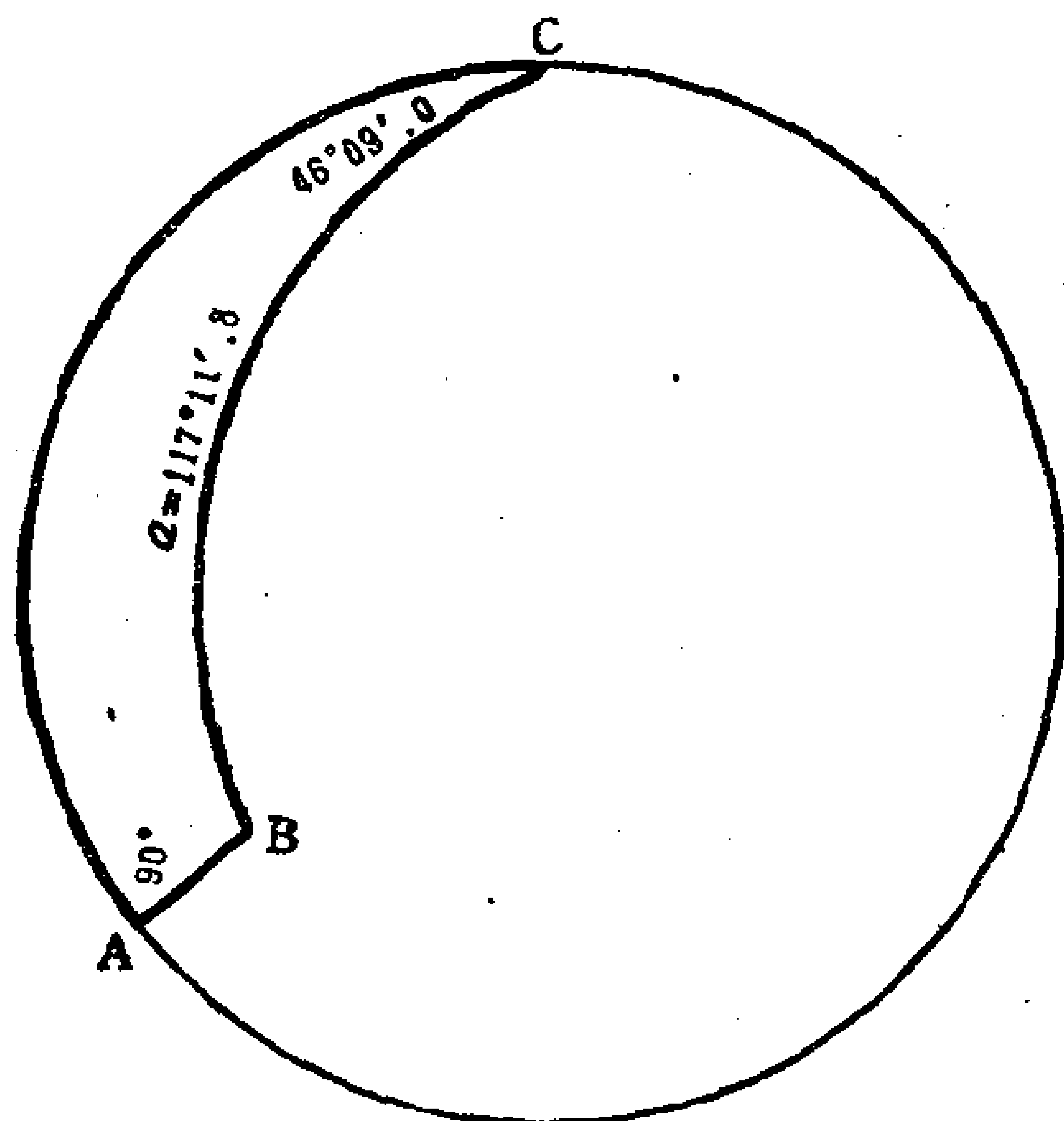
明了这些关系之后，遇到解球面直角三角形必須用正弦函数定值的时候，就有可能在兩个解之中，选擇出适合于問題的解。

例題 17. 設球面直角三角形 ABC，$A=90°$，$C=46°09'.0$，$a=117°11'.8$. 解該球面直角三角形。

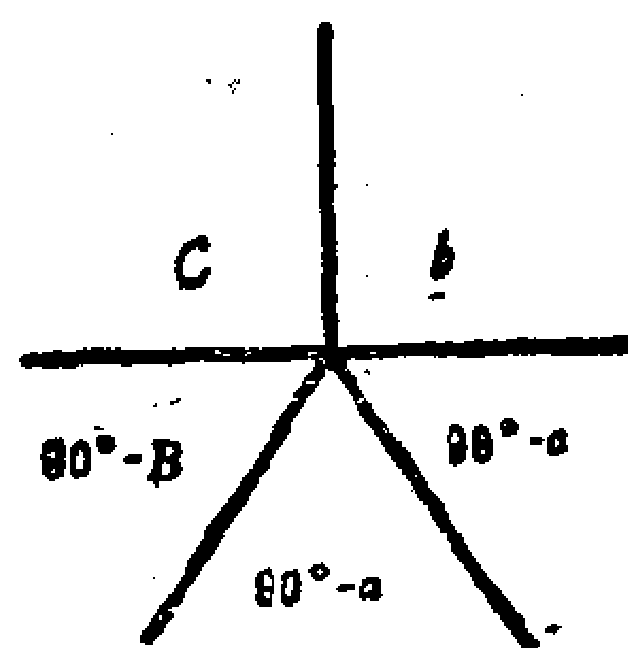
解　首先分析該球面直角三角形要素間的关系。已知对直角的边，$a=117°11'.8$，即 $a>90°$，根据 5.2 的分析，可知其余二边应位于不同象限。但 c 必

須与 C 位于同一象限，而 $C<90^\circ$，故知 $c\leqslant C<90^\circ$，而 $b\geqslant B>90^\circ$。

分析了各要素的关系之后，按解球面直角三角形的法則作圖，并列出解該球面直角三角形的公式，然后进行計算。



$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}B&=\operatorname{tg}C\cdot\cos a\\ \operatorname{tg}b&=\cos C\cdot\operatorname{tg}a\\ \sin c&=\sin C\cdot\sin a\\ &=\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{tg}b\end{aligned}\right\}$$



（例題 17 附圖）

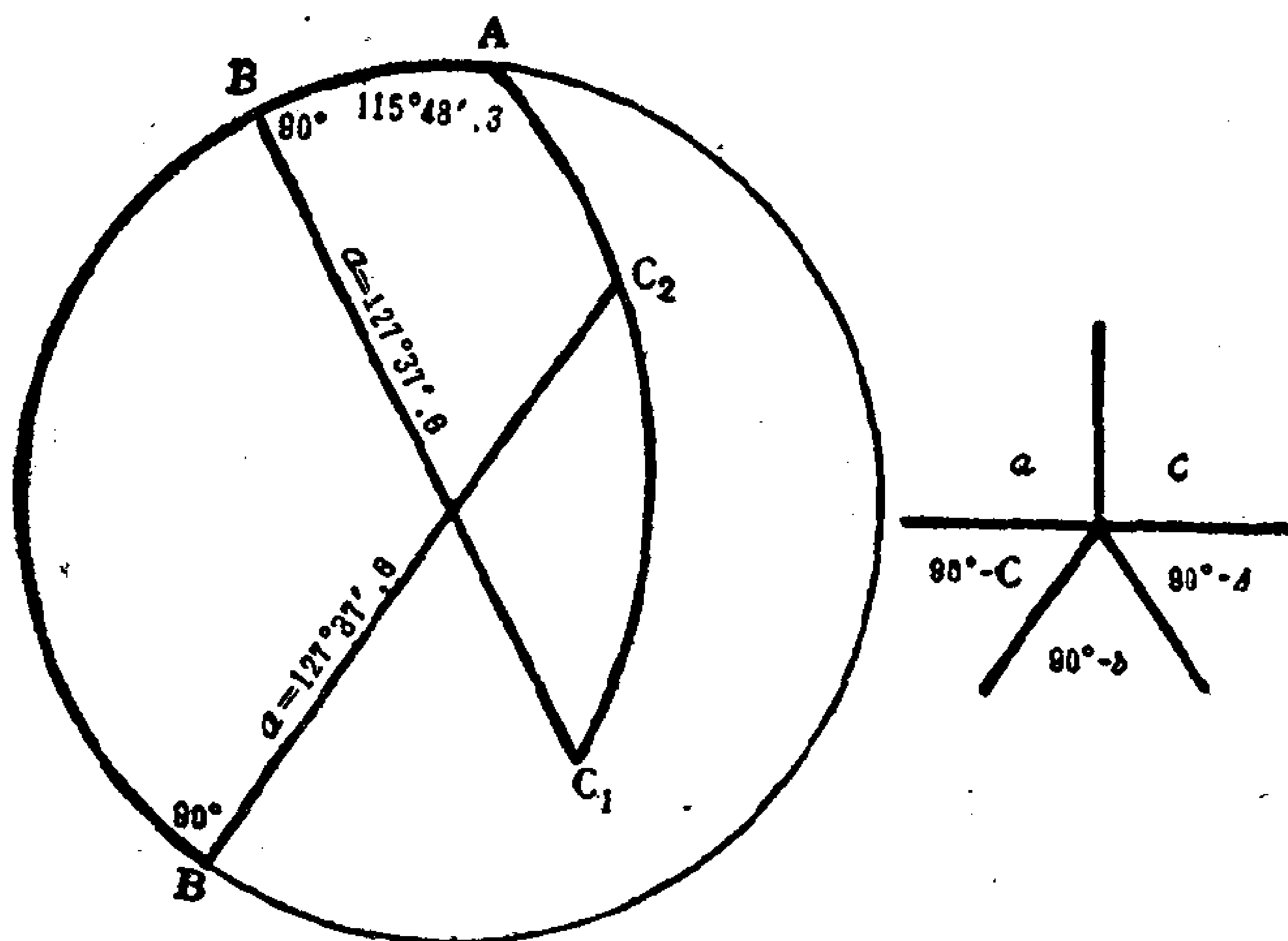
$C=46^\circ09.'0$	$L\operatorname{tg}$ 0.01744	$L\cos$ 9.84059	$L\sin$ 9.85803
$a=117^\circ11.'8$	$L\cos$ 9.65996 n	$L\operatorname{tg}$ 0.28916 n	$L\sin$ 9.94913
$B=115^\circ26.'6$	$L\operatorname{ctg}$ 9.67740 n		
$b=126^\circ33.'9$	$L\operatorname{tg}$ 0.12975 n	$L\operatorname{tg}$ 0.12975 n	
$c=39^\circ54.'0$	$L\sin$ 9.80715	←——→	$L\sin$ 9.80716

例題 18. 設球面直角三角形 ABC, $B=90^\circ$, $A=115^\circ48.'3$, $a=127^\circ37.'6$，解該球面直角三角形。

解

$$\left.\begin{aligned}\sin C&=\cos A\cdot\sec a\\ \sin b&=\csc A\cdot\sin a\\ \sin c&=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{tg}a\\ &=\sin C\cdot\sin b\end{aligned}\right\}$$

$A=115^\circ48.'3$	$L\cos$ 9.63880 n	$L\csc$ 0.04562	$L\operatorname{ctg}$ 9.68442 n
$a=127^\circ37.'6$	$L\sec$ 0.21430 n	$L\sin$ 9.89875	$L\operatorname{tg}$ 0.11303 n
$C_1=45^\circ28.'9$ $C_2=134^\circ31.'1$	$L\sin$ 9.85310		



（例題 18 附圖）

$b_1=118°23.'4$ $b_2=61°36.'6$ Lsin 9.94435 Lsin 9.94435

$c_1=38°50.'9$ $c_2=141°09.'1$ Lsin 9.79745 ←——→ Lsin 9.79745

例題 19. 設球面直角三角形 ABC，$C=90°$，$b=90°58.'8$，$c=89°17.'5$，求 B 角的值。

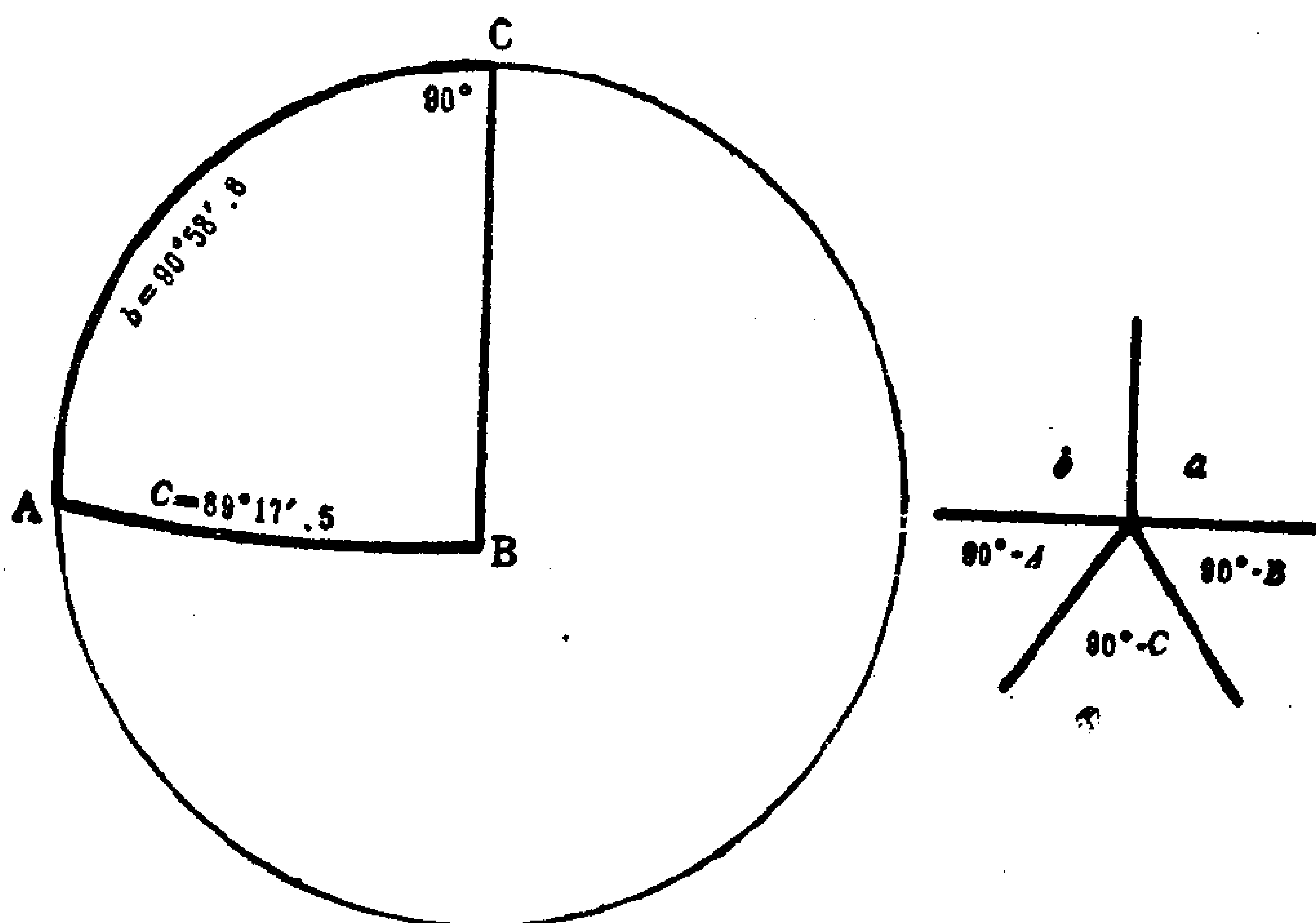
解

$$\sin B=\sin b\cdot\csc c$$

$b=90°58.'8$	Lsin 9.99994
$c=89°17.'5$	Lcsc 0.00003
$90°37.'0<B<90°43.'0$	Lsin 9.99997

这个例題說明当所求的値接近 90° 时，用正弦函数定値是困难的。在此种情况下，必須利用 $\operatorname{tg}\left(45°+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}$ 的关系，进行演算，才可解得确切的 B 角的値。演算方法如下：

今 $$\operatorname{tg}\left(45°+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}$$



（例題 19 附圖）

但 $$\sin B=\sin b\cdot\csc c$$

所以 $$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin b\cdot\csc c}{1-\sin b\cdot\csc c}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)\cdot\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c-b)\cdot\cos\frac{1}{2}(c+b)}}$$

$$=\pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(c+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c-b)}$$

$c=89^\circ17'30''$ $\qquad \frac{c}{2}=44^\circ38'45''$

$b=90^\circ58'48''$ $\qquad \frac{b}{2}=45^\circ29'24''$

$\frac{1}{2}(c+b)=90^\circ08'09''$ $\qquad L\operatorname{tg}\ 2.62512\ n$

$\frac{1}{2}(c-b)=-00^\circ50'39''$ $\qquad L\operatorname{ctg}\ 1.83166\ n$

$2L\operatorname{tg}\ 4.45678$

$$45°+\frac{B}{2}=89°39'41''\text{或}\ 90°20'19'' \qquad Ltg\ 2.22839$$

$$B=89°19'22''\text{或}\ 90°40'38''$$

因 $b>90°$，所以 $B>90°$，$B=90°40'38''$

5.3 球面直边三角形公式

球面直边三角形的有关公式，可以通过極綫三角形的关系，由球面直角三角形各公式导出：

極綫三角形 $A'B'C'$, $C'=90°$	球面直边三角形 ABC, $C=90°$
$\sin a'=\sin A'\cdot\sin C'$	$\sin A=\sin a\cdot\sin C$
$\sin a'=\mathrm{ctg}B'\cdot\mathrm{tg}b'$	$\sin A=\mathrm{ctg}b\cdot\mathrm{tg}B$
$\sin b'=\sin B'\cdot\sin c'$	$\sin B=\sin b\cdot\sin C$
$\sin b'=\mathrm{ctg}A'\cdot\mathrm{tg}a'$	$\sin B=\mathrm{ctg}a\cdot\mathrm{tg}A$
$\cos c'=\cos a\cdot\cos b'$	$\cos C=-\cos A\cdot\cos B$
$\cos C'=\mathrm{ctg}A'\cdot\mathrm{ctg}B'$	$\cos C=-\mathrm{ctg}a\cdot\mathrm{ctg}b$
$\cos A'=\sin B'\cdot\cos a'$	$\cos a=\sin b\cdot\cos A$
$\cos A'=\mathrm{tg}b'\cdot\mathrm{ctg}c'$	$\cos a=-\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{ctg}C$
$\cos B'=\sin A'\cdot\cos b'$	$\cos b=\sin a\cdot\cos B$
$\cos B'=\mathrm{tg}a'\cdot\mathrm{ctg}c'$	$\cos b=-\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}C$
$\cos a'\cdot\sin b'=\sin c'\cdot\cos A'$	$\cos A\cdot\sin B=\sin C\cdot\cos a$
$\cos b'\cdot\cos A'=\sin B'\cdot\cos C'$	$\cos B\cdot\cos a=-\sin b\cdot\cos C$
$\sin A'\cdot\cos C'=\cos a'\cdot\cos B$	$\sin a\cdot\cos C=-\cos A\cdot\cos b$
$\sin C'\cdot\cos B'=\cos b'\cdot\sin a$	$\sin C\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin A$
$\sin B'\cdot\sin a'=\sin A'\cdot\sin b'$	$\sin b\cdot\sin A=\sin a\cdot\sin B$.

从上表所列的球面直边三角形各公式看来，除了一些公式多了負号之外，其余不論形式或函数的关系都和球面直角三角形的公式相似，因此前面的兩个法則，也基本上可以适用到球面直边三角形。

今將球面直边三角形相鄰于直边的兩个角分別写在 大 圖形（圖17）上部兩空格內，其余的二边及直边所对的角則以其与 90° 的差順序写在圖形下部的空格內。于是

法則 I　任一要素的正弦，等于相鄰二要素正切的乘积，或等于相

对二要素余弦的乘积。若乘积的要素为同类，公式前应添一负号。

法則Ⅱ　任意四个相联的要素，一端要素余弦与其相邻要素正弦的乘积，等于另端要素余弦与其相邻要素正弦的乘积。若相联的四个要素包括有圆形下部的三个要素，公式前应添一负号。

根据上述两法則写出 C 为 $90°$ 的球面直边三角形各公式，和上表所列的完全相同。即

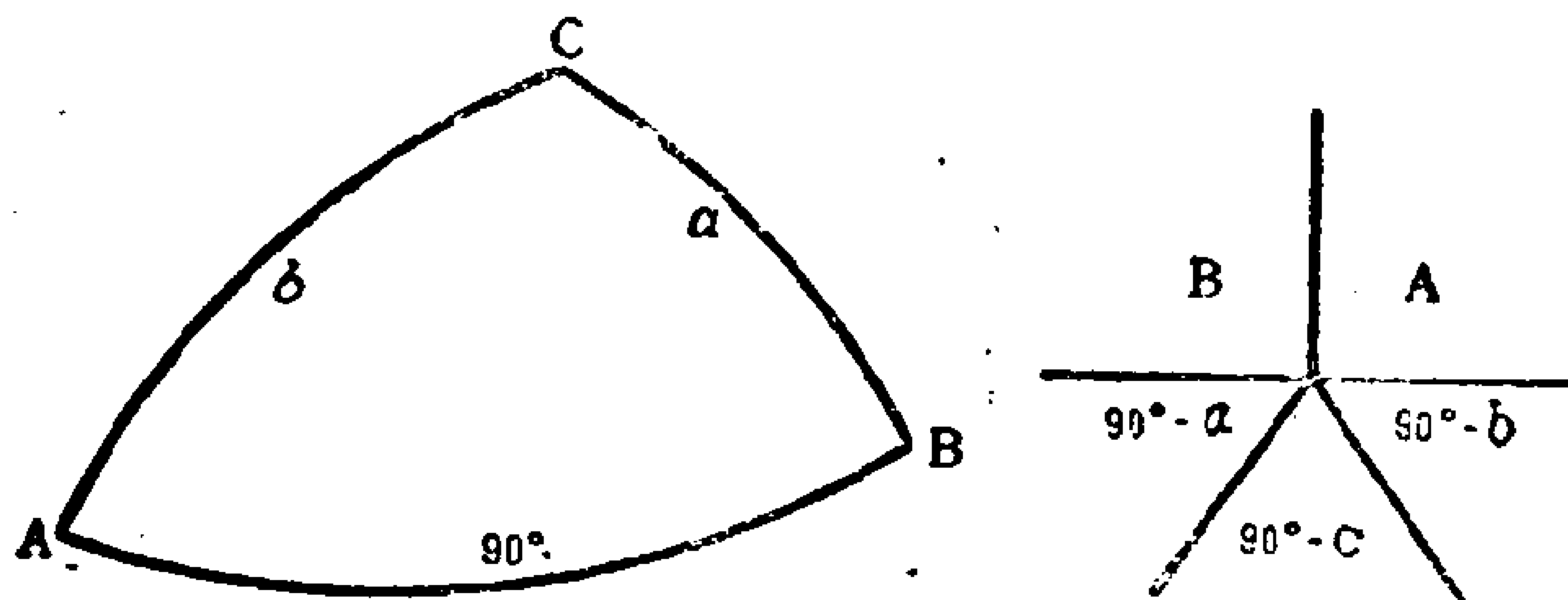


圖 17

根据法則写出的公式 $C=90°$	球面直边三角形公式 $C=90°$
$\sin A=\cos(90°-a)\cdot\cos(90°-C)$	$\sin A=\sin a\cdot\sin C$
$\sin A=\mathrm{tg}(90°-b)\cdot\mathrm{tg}B$	$\sin A=\mathrm{ctg}b\cdot\mathrm{tg}B$
$\sin B=\cos(90°-b)\cdot\cos(90°-C)$	$\sin B=\sin b\cdot\sin C$
$\sin B=\mathrm{tg}(90°-a)\cdot\mathrm{tg}A$	$\sin B=\mathrm{ctg}a\cdot\mathrm{tg}A$
$\sin(90°-C)=-\cos A\cdot\cos B$	$\cos C=-\cos A\cdot\cos B$
$\sin(90°-C)=-\mathrm{tg}(90°-a)\cdot\mathrm{tg}(90°-b)$	$\cos C=-\mathrm{ctg}a\cdot\mathrm{ctg}b$
$\sin(90°-a)=\cos(90°-b)\cdot\cos A$	$\cos a=\sin b\cdot\cos A$
$\sin(90°-a)=-\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}(90°-C)$	$\cos a=-\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{ctg}C$
$\sin(90°-b)=\cos(90°-a)\cdot\cos B$	$\cos b=\sin a\cdot\cos B$
$\sin(90°-b)=-\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}(90°-C)$	$\cos b=-\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}C$
$\cos A\cdot\sin B=\cos(90°-C)\cdot\sin(90°-a)$	$\cos A\cdot\sin B=\sin C\cdot\cos a$
$\cos B\cdot\sin(90°-a)=-\cos(90°-b)\cdot\sin(90°-C)$	$\cos B\cdot\cos a=-\sin b\cdot\cos C$
$\cos(90°-a)\cdot\sin(90°-C)=-\cos A\cdot\sin(90°-b)$	$\sin a\cdot\cos C=-\cos A\cdot\cos b$
$\cos(90°-C)\cdot\sin(90°-b)=\cos B\cdot\sin A$	$\sin C\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin A$
$\cos(90°-b)\cdot\sin A=\cos(90°-a)\cdot\sin B$	$\sin b\cdot\sin A=\sin a\cdot\sin B$

5.4 球面直边三角形各要素的关系

設球面直边三角形，ABC，$C=90°$，根据法則得

$$\cos C=-\cos A\cdot\cos B$$

当 $C<90°$，$\cos C$ 为正值，因为公式前有一負号，所以 $\cos A\cdot\cos B$ 的积应为負值，即 A 与 B 必須位于不同象限；当 $C>90°$，$\cos C$ 为負值，$\cos A\cdot\cos B$ 的积应为正值，即 A 与 B 必須位于同一象限。这些可以由下表来表示：

C	$<90°$	$<90°$	$>90°$	$>90°$
A	$<90°$	$>90°$	$<90°$	$>90°$
B	$>90°$	$<90°$	$<90°$	$>90°$

这里可以看出球面直边三角形要素間的第一个关系是：

对直边的角小于 90°，則其他二角位于不同象限；对直边的角大于 90°，則其他二角位于同一象限。

根据法則，又可有公式

$$\cos a=\sin b\cdot\cos A$$

由于 b 小于 180° 而大于 0°，所以 $\sin b$ 恒为正值且小于 1，即 $\cos a$ 必小于 $\cos A$ 且为同号，故

$$A\leqslant a<90°$$

$$A\geqslant a>90°$$

同理

$$B\leqslant b<90°$$

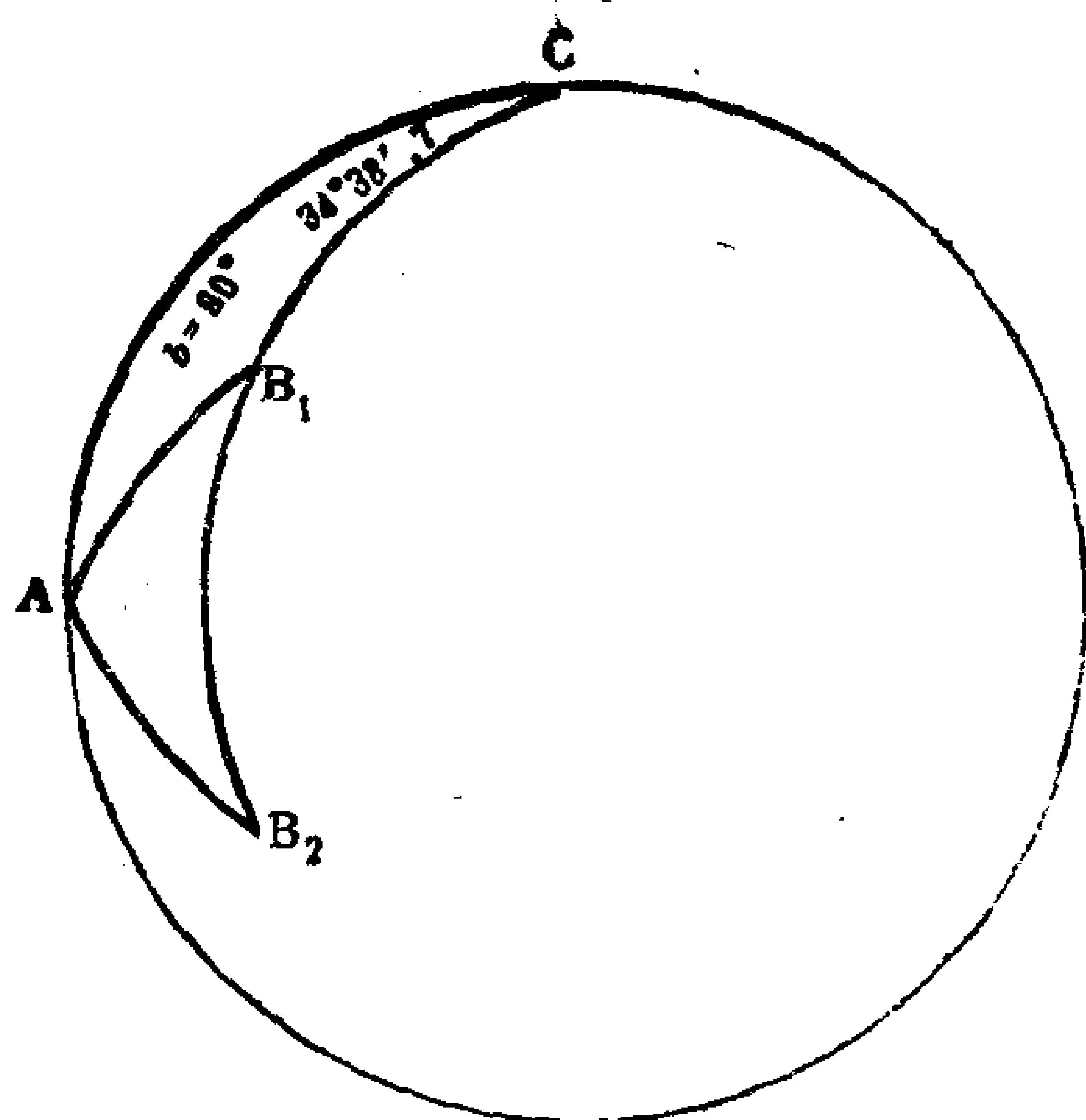
$$B\geqslant b>90°$$

所以球面直边三角形要素間第二个关系是

直边的鄰角与其所对的边位于同一象限；边小于 90°，則角小于或等于所对的边，边大于 90°，則角大于或等于所对的边。

例題 20. 設球面直边三角形 ABC，$b=90°$，$c=43°19'.6$，$C=34°38'.7$，解該球面直边三角形。

解



$\sin a = \cos c \cdot \sec C$

$\sin B = \csc c \cdot \sin C$

$\sin A = \text{ctg}\, c \cdot \text{tg}\, C$

$= \sin a \cdot \sin B$

（例题20附圖）

$c=43°19'.6$		$L\cos 9.86181$	$L\csc 0.16358$	$L\text{ctg}\, 0.02538$
$C=34°38'.7$		$L\sec 0.08476$	$L\sin 9.75472$	$L\text{tg}\, 9.83949$
$a_1=62°12'.2$	$a_2=117°47'.8$	$L\sin 9.94657$		
$B_1=124°03'.3$	$B_2=55°56'.7$	$L\sin 9.91830$	$L\sin 9.91830$	
$A_1=47°06'.3$	$A_2=132°53'.7$	$L\sin 9.86487 \leftarrow$		$\rightarrow L\sin 9.86487$

例題 21．設球面直边三角形ABC，$a=90°$，$A=167°23'$，$B=12°31'$，求該球面直边三角形C角的値。

解

$$\cos C = -\cos A \cdot \sec B$$

$$A=167°23' \qquad L\cos 9.98938\, n$$

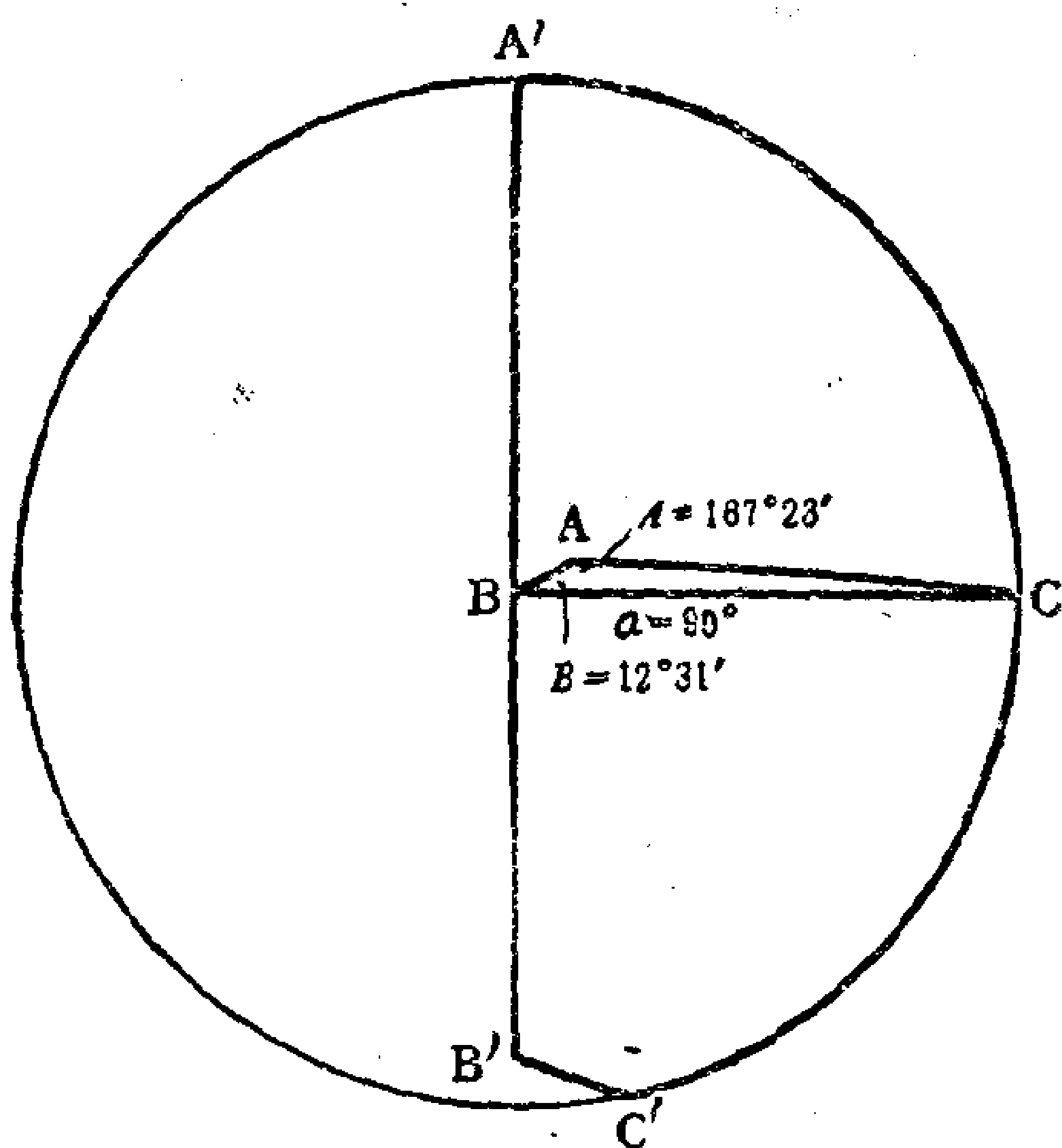
$$B=12°31' \qquad L\sec 0.01045$$

$$01°35' < C < 01°37' \qquad -L\cos 9.99983\, n$$

由于所求的C角相当小，余弦函数不能定出确切的値。遇到此类情况时，可以利用$\text{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}$的关系，用正切函数来进行定値。

今
$$\text{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}$$

但
$$\cos C = -\cos A \cdot \sec B$$



（例題21附圖）

所以
$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A\cdot\sec B}{1-\cos A\cdot\sec B}}$$

$$=\sqrt{\mathrm{ctg}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\mathrm{ctg}\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$A=167°23' \qquad \frac{A}{2}=83°41'30''$$

$$B=12°31' \qquad \frac{B}{2}=6°15'30''$$

$$\frac{1}{2}(A+B)=89°57'00'' \qquad L\,\mathrm{ctg}\ 6.94085$$

$$\frac{1}{2}(A-B)=77°26'00'' \qquad \underline{L\,\mathrm{ctg}\ 9.34814}$$

$$2\,L\,\mathrm{tg}\ 16.28899$$

$$C=01°35'54'' \qquad \frac{C}{2}=00°47'57'' \qquad L\,\mathrm{tg}\ \ 8.14450$$

§6． 球面初等三角形

6.1 小角度的三角函数

根据馬卡罗林定理（Maclaurin's Theorem）可將正弦、余弦、正切

等函数展成無穷級数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots\cdots$$

式中 x 的單位为弧度。当 x 的値相当小，且对 x 的精确度要求不是十分严格的情况下，采用上述級数的近似式，即

$$\sin x = x \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{tg} x = x$$

对于簡化演算是十分有利的。下表給出它的誤差范圍：

$x-\sin x=$	$x=$	$1-\cos x=$	$x=$	$\operatorname{tg} x - x=$	$x=$
0°.1	12°33′	0.1	25°51′	0°.1	9°57′
1′.0	6°54′	0.01	8°57′	1′.0	5°29′
1″,0	1°46′	0.001	2°34′	1″.0	1°24′

6.2 小的球面初等三角形

設小的球面初等三角形 ABC 的三边都相当的小，則在一定的誤差范圍內，下面的等式是允許的：

$$\sin a = a \qquad \sin b = b \qquad \sin c = c$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} \qquad \cos b = 1 - \frac{b^2}{2} \qquad \cos c = 1 - \frac{c^2}{2}$$

所以球面正弦公式

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

应用到小的球面初等三角形，由于 a、b 和 c 都相当的小，公式可以写成

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (19)$$

这和平面三角形的正弦公式是沒有分别的。

同理球面余弦公式可以写成

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos A \\ b^2 &= a^2+c^2-2a\cdot c\cdot\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos C \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

球面五联关系式可以写成

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cdot\cos C+c\cdot\cos B \\ b &= a\cdot\cos C+c\cdot\cos A \\ c &= a\cdot\cos B+b\cdot\cos A \end{aligned}\right\}、 \tag{21}$$

由此可見，小的球面初等三角形，在允許的誤差范圍之內，可以視为平面三角形而进行計算。

烈然德耳定理(Legendre′s Theorem)証明了球面初等三角形和平面三角形的关系是

$$a_1=aR \qquad b_1=bR \qquad c_1=cR \qquad p_1=pR$$

$$A_1=A-\frac{E}{3} \quad B_1=B-\frac{E}{3} \quad C_1=C-\frac{E}{3} \quad E=A+B+C-180^\circ$$

这里的 $a\ b\ c\ A\ B\ C$ 是球面初等三角形的边与角，R 是球的半徑，$a_1\ b_1\ c_1$ $A_1\ B_1\ C_1$ 是平面三角形的边与角。这兩个三角形的圖形如下：

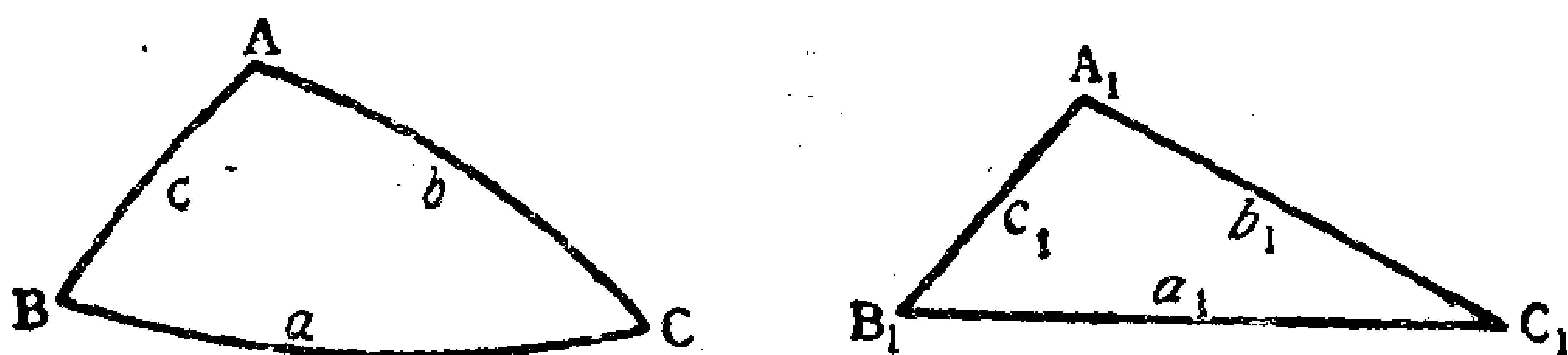


圖 18

球面初等三角形的角与平面三角形的对应角的差是球面角盈的三分之一，这个关系是需要証明的。

由三角公式有

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A_1}{2}-\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A_1}{2}$$

但 $$\sin\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{(p_1-b_1)\cdot(p_1-c_1)}{b_1\cdot c_1}}$$

$$\cos\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{p_1\cdot(p_1-a_1)}{b_1\cdot c_1}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p_1-b_1}{R}\cdot\sin\frac{p_1-c_1}{R}}{\sin\frac{b_1}{R}\cdot\sin\frac{c_1}{R}}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p_1}{R}\cdot\sin\frac{p_1-a_1}{R}}{\sin\frac{b_1}{R}\cdot\sin\frac{c_1}{R}}}$$

代入前式并化簡，則有

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{1}{\sqrt{b_1c_1\sin\frac{b_1}{R}\cdot\sin\frac{c_1}{R}}}\times$$

$$\times\left[\sqrt{p_1(p_1-a_1)\sin\frac{p_1-b_1}{R}\cdot\sin\frac{p_1-c_1}{R}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{(p_1-b_1)(p_1-c_1)\sin\frac{p_1}{R}\cdot\sin\frac{p_1-a_1}{R}}\right]$$

但小角度的正弦函数第三級近似值是

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}$$

所以
$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{1}{\sqrt{b_1c_1\left(\frac{b_1}{R}-\frac{b_1^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c_1}{R}-\frac{c_1^3}{6R^3}\right)}}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{p_1(p_1-a_1)\left[\frac{p_1-b_1}{R}-\frac{(p_1-b_1)^3}{6R^3}\right]\cdot\left[\frac{p_1-c_1}{R}-\frac{(p_1-c_1)^3}{6R^3}\right]}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{(p_1-b_1)(p_1-c_1)\left(\frac{p_1}{R}-\frac{p_1^3}{6R^3}\right)\left[\frac{p_1-a_1}{R}-\frac{(p_1-a_1)^3}{6R^3}\right]}\right\}$$

括出式中的共同項，則

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}}{b_1c_1\sqrt{\left(1-\frac{b_1^2}{6R^2}\right)\left(1-\frac{c_1^2}{6R^2}\right)}}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{\left[1-\frac{(p_1-b_1)^2}{6R^2}\right]\cdot\left[1-\frac{(p_1-c_1)^2}{6R^2}\right]}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(1-\frac{p_1^2}{6R^2}\right)\left[1-\frac{(p_1-a_1)^2}{6R^2}\right]}\right\}$$

展开上式，并以S_1代$\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}$，则

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{S_1}{6R^2}\left(1+\frac{b_1^2+c_1^2}{12R^2}\right)$$

或
$$\frac{A-A_1}{2}=\frac{S_1}{6R^2}\cdot\csc 1''$$

即
$$A-A_1=\frac{S_1}{3R^2}\cdot\csc 1''$$

同理
$$B-B_1=\frac{S_1}{3R^2}\cdot\csc 1''$$

$$C-C_1=\frac{S_1}{3R^2}\cdot\csc 1''$$

三式的和
$$(A+B+C)-(A_1+B_1+C_1)=\frac{S_1}{R^2}\cdot\csc 1''$$

但
$$(A_1+B_1+C_1)=180^\circ$$

$$(A+B+C)-(A_1+B_1+C_1)=A+B+C-180^\circ$$
$$=E$$

即
$$\frac{S_1}{R^2}\cdot\csc 1''=E$$

所以
$$A-A_1=\frac{E}{3}$$

$$B-B_1=\frac{E}{3}$$

$$C-C_1=\frac{E}{3}$$

根据烈然德耳定理用平面三角法計算出边長100公里的地面三角形的角，其誤差不及0′.1。这样小量的誤差，在实际应用中是完全可以被接受的。

6.3 窄的球面初等三角形

設窄的球面初等三角形 ABC，a 比起 b 和 c 是相当的小（圖19），显然 a 的对角 A 也是相当的小。

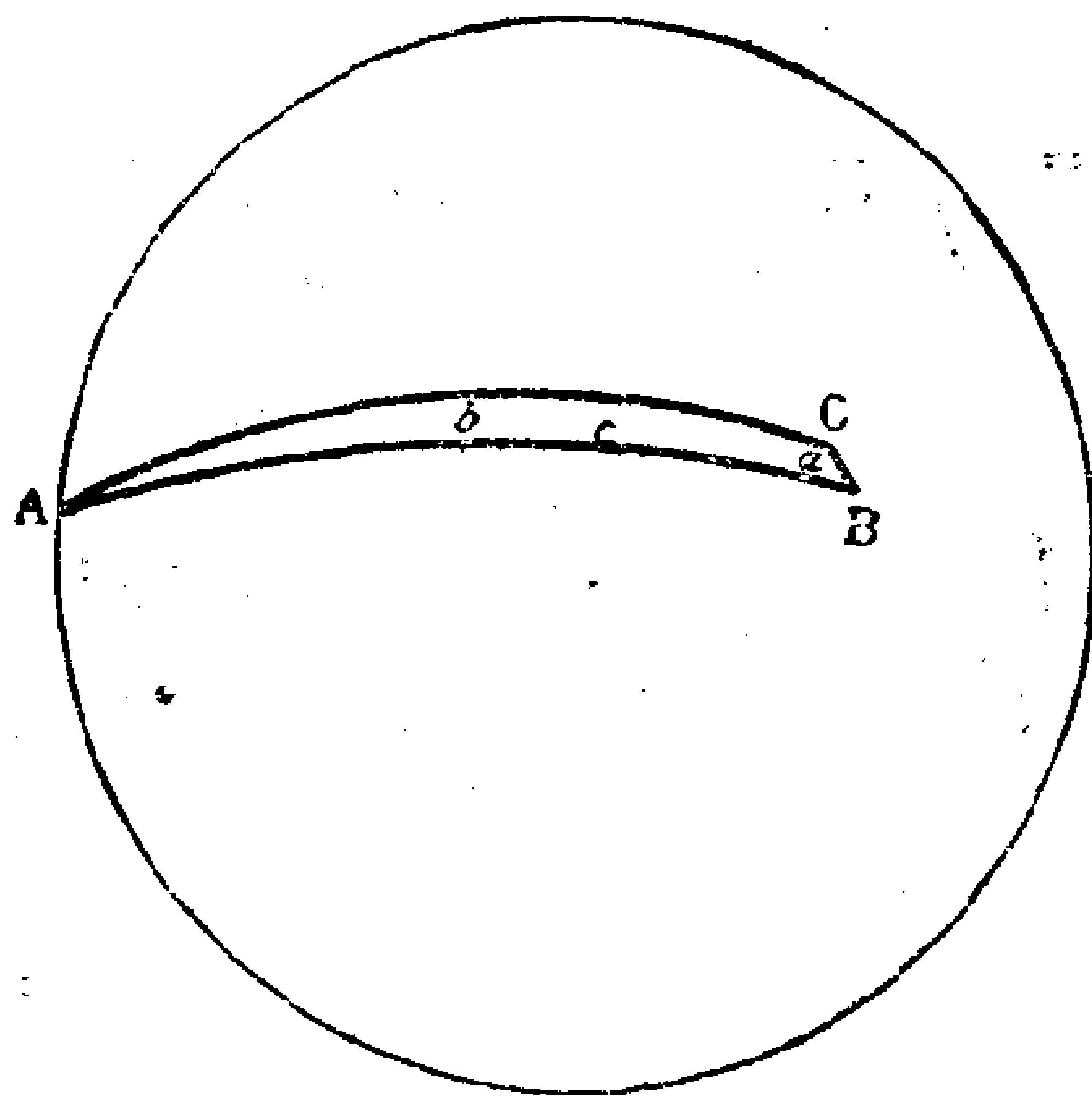


圖 19

根据球面五联关系式（2）得

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

即 $$\sin a \cdot \cos B = \sin(c-b) + 2\sin b \cdot \cos c \cdot \sin^2\frac{A}{2}$$

因 A 是相当小，$2\sin b \cdot \cos c \cdot \sin^2\frac{A}{2}$ 項可以忽略，于是

$$\sin(c-b) = \sin a \cdot \cos B$$

但 a 是相当小，而 $(c-b)$ 的差也很小，所以 $(c-b)$ 的第一次近似式可以写成

$$(c-b)_1 = a \cdot \cos B \qquad (22a)$$

又根据球面正弦公式（1）有

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin b}$$

因 A 及 a 都相当小，所以

$$A=a\cdot\frac{\sin B}{\sin b}$$

但 $$b=c-(c-b)$$

所以 $$A=a\frac{\sin B}{\sin[c-(c-b)]}=$$

$$=\frac{a\sin B}{\sin c\cdot\cos(c-b)-\cos c\cdot\sin(c-b)}$$

因$(c-b)$的差很小，所以$\cos(c-b)=1$，$\sin(c-b)=(c-b)$

$$A=\frac{a\sin B}{\sin c-(c-b)\cdot\cos c}=$$

$$=\frac{a\sin B}{\sin c}\cdot[1-(c-b)\operatorname{ctg}C]^{-1}$$

展开$[1-(c-b)\operatorname{ctg}c]^{-1}$，并忽略二次及二次以上的項，則

$$A=\frac{a\sin B}{\sin c}+\frac{a(c-b)\cdot\sin B\cdot\operatorname{ctg}C}{\sin c}\qquad(23)$$

当 c 比起 a 是相当大，而 a 和 A 又是相当小的情况下，

$\frac{a(c-b)\cdot\sin B\cdot\operatorname{ctg}C}{\sin c}$ 項可以忽略，于是 A 的第一次近似可以写成

$$A_1=\frac{a\sin B}{\sin c}\qquad(24a)$$

現在再来研究$(c-b)$及 A 的第二次近似。

已知 $$\sin(c-b)=\sin a\cdot\cos B-2\sin b\cdot\cos c\cdot\sin^2\frac{A}{2}$$

由于$(c-b)$，a 及 A 都相当小，所以$(c-b)$的第二次近似可以写成

$$(c-b)_2=a\cos B-\frac{A^2}{2}\cdot\sin b\cdot\cos C$$

但由式(22a)得 $$a\cos B=(c-b)_1$$

由式(24a)及球面正弦公式得

$$A^2=\frac{a\cdot\sin B}{\sin c}\cdot\frac{a\cdot\sin B}{\sin b}$$

所以 $(c-b)_2=(c-b)_1-\frac{1}{2}\sin b\cdot\cos C\cdot\frac{a\cdot\sin B}{\sin c}\cdot\frac{a\cdot\sin B}{\sin b}=$

$$=(c-b)_1-\frac{a^2}{2}\sin^2 B\cdot\text{ctg}\,C \qquad (22\text{b})$$

由式(23)得 $$A=\frac{a\sin B}{\sin c}+\frac{a(c-b)\cdot\sin B\cdot\text{ctg}\,C}{\sin c}$$

但 $\frac{a\sin B}{\sin c}=A_1(24\text{a}),(c-b)=a\cos B(22\text{a})$,所以 A 的第二次近似

$$A_2=A_1+a\cdot a\cos B\cdot\sin B\cdot\text{ctg}\,c\cdot\csc c$$

$$=A_1+\frac{a^2}{2}\cdot\sin 2B\cdot\text{ctg}\,c\cdot\csc c \qquad (24\text{b})$$

或 $$A_2\cdot\sin c=A_1\cdot\sin c+\frac{a^2}{2}\cdot\sin 2B\cdot\text{ctg}\,c。$$

由球面五联关系式,有

$$\sin A\cdot\cos c=\cos C\cdot\sin B+\sin C\cdot\cos B\cdot\cos a$$

或 $$\sin A\cdot\cos c=\sin(C+B)-2\sin C\cdot\cos B\sin^2\frac{a}{2}$$

由于 A 及 a 是相当小, $\sin A=A$, $\sin^2\frac{a}{2}$ 的项可以忽略,于是

$$A\cdot\cos c=\sin(C+B)$$
$$=\sin(C_\text{П}-B)$$

式中的 $C_\text{П}$ 为 C 的外角,即$C_\text{П}=180°-C$。当 a 是足够小,则$(C_\text{П}-B)$的差亦相当小,于是$\sin(C_\text{П}-B)=(C_\text{П}-B)$,所以$(C_\text{П}-B)$的第一近似

$$(C_\text{П}-B)_1=A\cdot\cos C \qquad (25\text{a})$$

上面已有

$$\sin(C+B)=\sin A\cdot\cos c+2\sin C\cdot\cos B\cdot\sin^2\frac{a}{2}$$

即 $$\sin(C_\text{П}-B)=\sin A\cdot\cos c+2\sin C\cdot\cos B\cdot\sin^2\frac{a}{2}$$

则它的近似式可以写成

$$(C_\text{П}-B)=A\cdot\cos c+\frac{a^2}{2}\cdot\sin C\cdot\cos B$$

但 $$a=A\cdot\frac{\sin c}{\sin C}$$

由(24a)有 $$a=A\cdot\frac{\sin c}{\sin B}$$

所以 $$a^2=A^2\cdot\frac{\sin^2 c}{\sin B\cdot\sin C}$$

所以$(C_\Pi-B)$的第二近似 $$(C_\Pi-B)_2=(C_\Pi-B)_2+\frac{A^2}{2}\sin^2 c\cdot\operatorname{ctg}^2 B \tag{25b}$$

球面初等三角形对于研究球面三角形誤差是非常有用的。例如球面三角形 ABC 由于某种原因，b 边产生了小量誤差 Δb，使三角形由 ABC 变成ABC_1（圖20）。

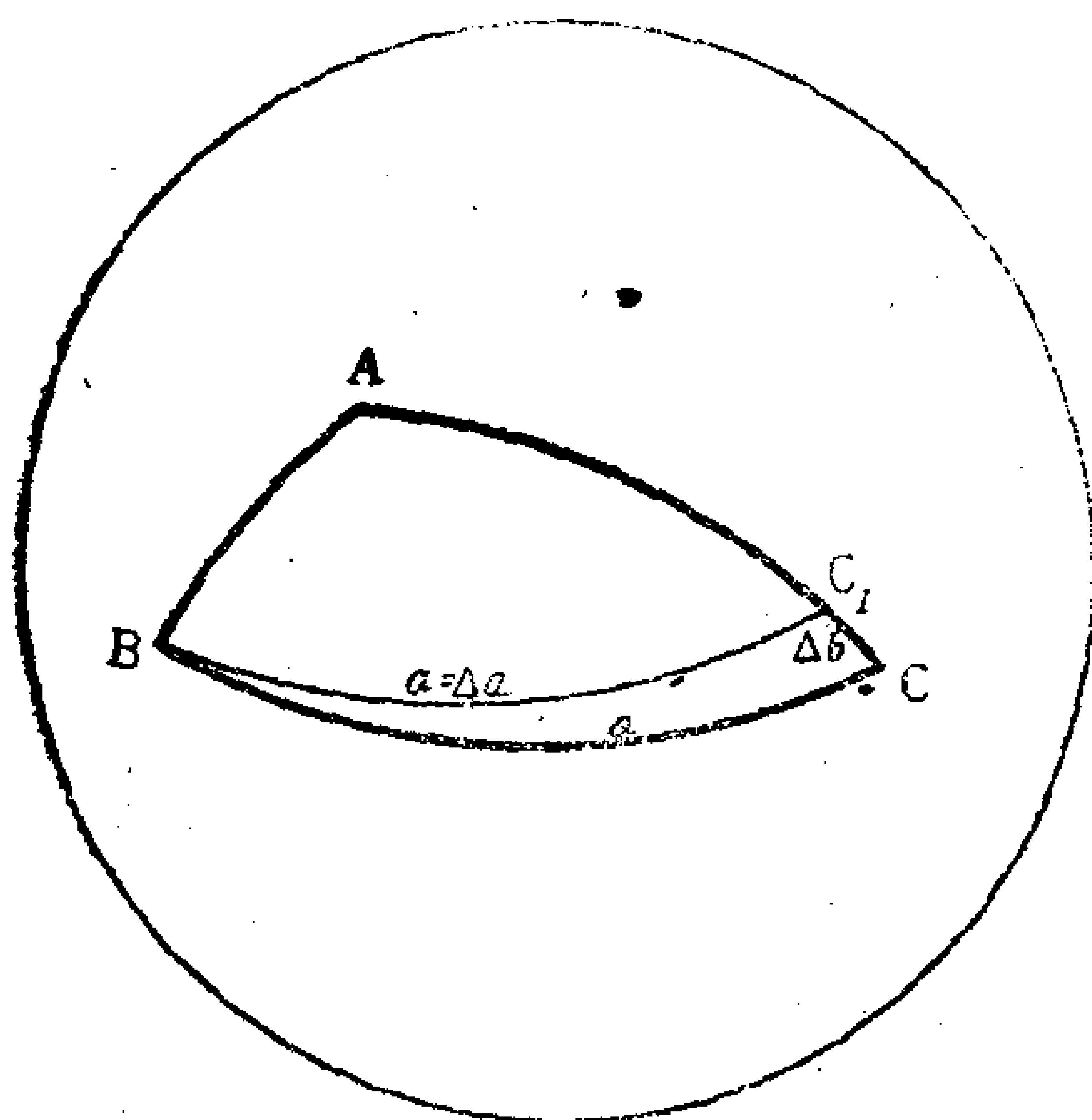


圖 20

因为 CC_1 比起 $BC\cdot BC_1$ 是相当小，所以BCC_1是一个窄的球面初等三角形。根据公式(22b)可以得出由于 b 边的誤差 Δb 所引起的 a 边誤差

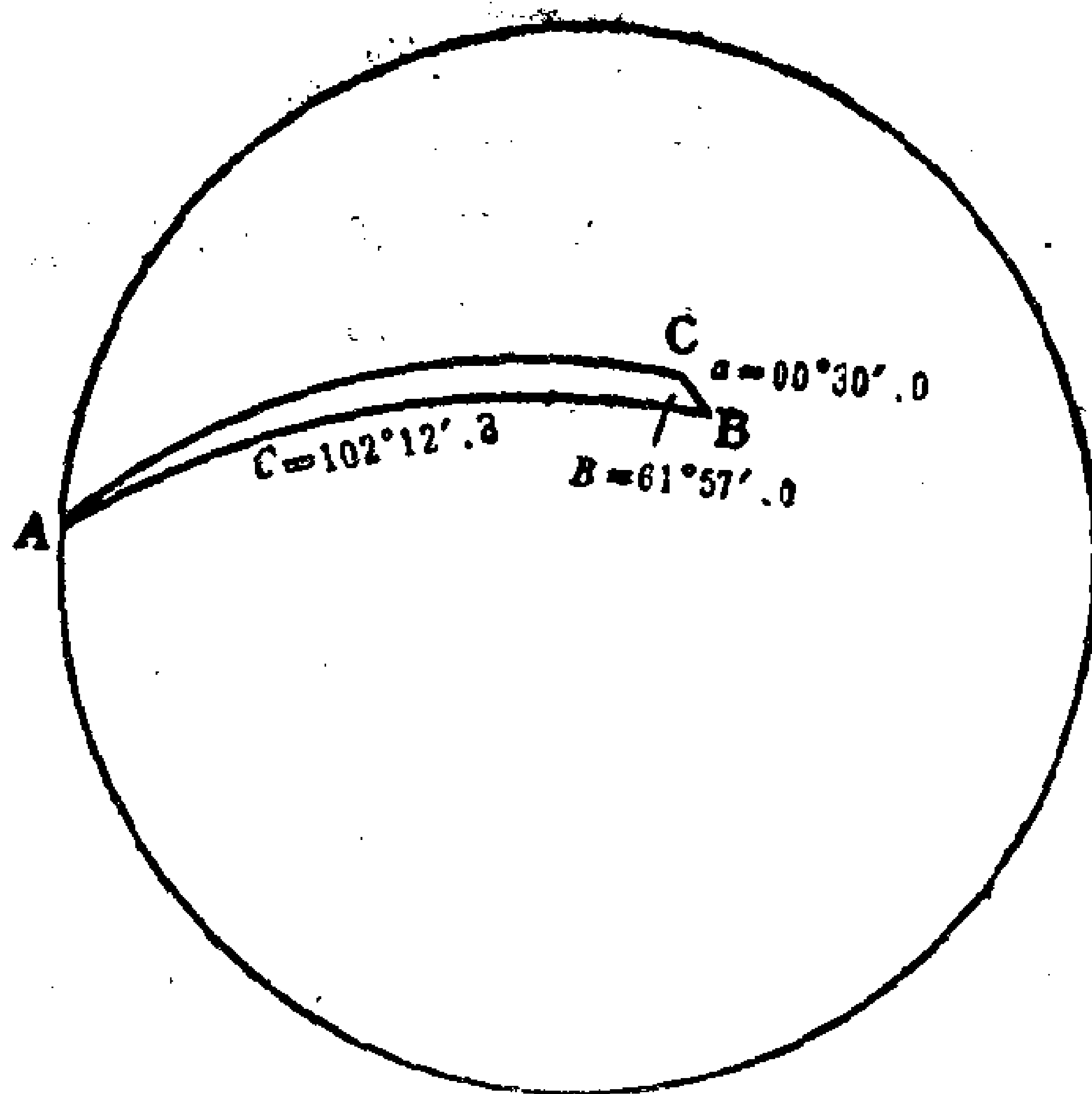
$$\Delta a=\Delta b\cdot\cos C-\frac{\Delta b^2}{2}\cdot\sin^2 C\cdot\operatorname{ctg} a \tag{26a}$$

而由于 Δb 所引起的 B 角誤差

$$\Delta B\cdot\sin a=\Delta b\cdot\sin C+\frac{\Delta b^2}{2}\cdot\sin 2C\cdot\operatorname{ctg} a \tag{26b}$$

例題 22. 設球面初等三角形 ABC，$a=00°30'.0$，$c=102°\ 12'.3$，$B=61°\ 57'.0$，求 b 及 A 的值。

解



（例題 22 附圖）

由公式(22a)　　　　$(c-b)_1=a\cdot\cos B$

所以公式(22b)可以写成

$$(c-b)_2=a\cdot\cos B-\frac{a^2}{2}\cdot\sin^2 B\cdot\text{ctg } c$$

但公式中的a是以弧度，弧分，弧秒为單位，將它化变为度、分、秒單位后，公式应写成

$$\frac{1}{3437.7}\cdot(c-b)'_2=\frac{a'}{3437.7}\cos B-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{3437.7}\right)^2\cdot\sin^2 B\cdot\text{ctg } c$$

或　$$(c-b)'_2=a'\cdot\cos B-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a')^2}{3437.7}\cdot\sin^2 B\cdot\text{ctg } c$$

$a=00°30'.0$	log 1.47712	$a=00°30'.0$	2log 2.95424
$B=61°57'.0$	Lcos 9.67232	$B=61°57'.0$	2L sin 9.89146
$(c-b)_1=00°14'.1$	log 1.14944	$c=102°12'.3$	L ctg 9.33505 n
		$\frac{1}{6875.4}$	log $\bar{4}$.16270

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(a')^2}{3437.7}\cdot\sin^2 B\cdot\text{ctg } c=-00°0'.02 \qquad \log \bar{2}.34345\ n$$

$$\therefore\ (c-b)'_2=00°14'.1-(-00°00'.02)$$

$$=00°14'07.''2$$

$$\therefore \quad b=c-(c-b)$$

$$=102°12'18''.0-00°14'07''.2$$

$$=101°58'10''.8$$

又由公式(24a)有 $A_1=\dfrac{a\cdot\sin B}{\sin c}$

所以公式(24b)可以写成

$$A=\frac{a\cdot\sin B}{\sin c}+\frac{a^2}{2}\cdot\sin 2B\cdot\text{ctg}\, c\cdot\csc c$$

或 $$A'=\frac{a'\cdot\sin B}{\sin c}+\frac{(a')^2}{6875.4}\cdot\sin 2B\cdot\text{ctg}\, c\cdot\csc c$$

$a=00°30'.0$	log 1.47712	$a=00°30'.0$	2log 2.95424
$B=61°57'.0$	$L\sin$ 9.94573	$2B=123°54'.0$	$L\sin$ 9.91909
$c=102°12'.3$	$L\csc$ 0.00992	$c=102°12'.3$	$L\,\text{ctg}$ 9.33505 n
$A'_1=00°27'.1$	log 1.43277	$c=102°12'.3$	$L\csc$ 0.00992
		$\dfrac{1}{6875.4}$	log $\bar{4}.16270$

$$\frac{(a')^2}{6875.4}\cdot\sin 2B\cdot\text{ctg}\, c\cdot\csc c=-00°00'.024 \quad \log\ \bar{2}.38200\, n$$

$$\therefore \quad A=00°27'.1+(-00°00'.024)$$

$$=00°27'.076$$

$$=00°27'04''.6$$

§7. 球面三角形解法

7.1 解球面三角形的一般步骤

据据球面三角形已知的要素求解其余要素的方法，叫作球面三角形解法。解球面三角形的必要条件是，必须在六个要素中，知其三个要素的值，然后应用前此所导出的公式，求其余要素的值。

球面三角形解法可以分为六种类型，即

1)已知三边，求其余三角；

2)已知三角，求其余三边；

3)已知二边及其夾角，求其余二角及一边；

4)已知二角及其夾边，求其余二边及一角；

5)已知二边及其一边的对角，求其余二角及一边；

6)已知二角及其一角的对边，求其余二边及一角。

不論是那一种类型，演解的步驟都是一样的，即

1)根据所給的条件，画出該三角形的圖形，經驗証明，圖形愈精确，对于驗对演算結果所起的作用也愈大。

2)根据已知的条件，选擇解該三角形应用的公式。儘量选用正切或余切函数的对数式公式。因为对数式公式演算較为簡便，而正切或余切函数則可給出較精确的解。

3)按公式的要求，列出演算格式，进行演算。整齐的行列和清晰的字体，是防止演算發生錯誤最有效的方法。

7.2 已知三边的球面三角形解法

設已知球面三角形的三个边 $a\ b\ c$，（若其中有一边为 $90°$，則該三角形为球面直边三角形，它的解法已見于例題 20—21)，解該三角形的方法有：

1)用球面半角正切公式(10)求 ABC 各角的值，即

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_a}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_b}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b}{\sin p\cdot\sin p_c}}$$

2)用球面半正矢公式(7)求 ABC 各角的值，即

$$\operatorname{Hav}A=\csc b\cdot\csc c\cdot\sqrt{\operatorname{Hav}(a+\overline{b-c})\cdot\operatorname{Hav}(a-\overline{b-c})}$$

$$\operatorname{Hav}B=\csc a\cdot\csc c\cdot\sqrt{\operatorname{Hav}(b+\overline{a-c})\cdot\operatorname{Hav}(b-\overline{a-c})}$$

$$\operatorname{Hav}C=\csc a\cdot\csc b\cdot\sqrt{\operatorname{Hav}(c+\overline{a-b})\cdot\operatorname{Hav}(c-\overline{a-b})}$$

3)用球面余弦公式(3a)求 ABC 各角的值，即

$$\cos A=(\cos a-\cos b\cdot\cos c)\cdot\csc b\cdot\csc c$$

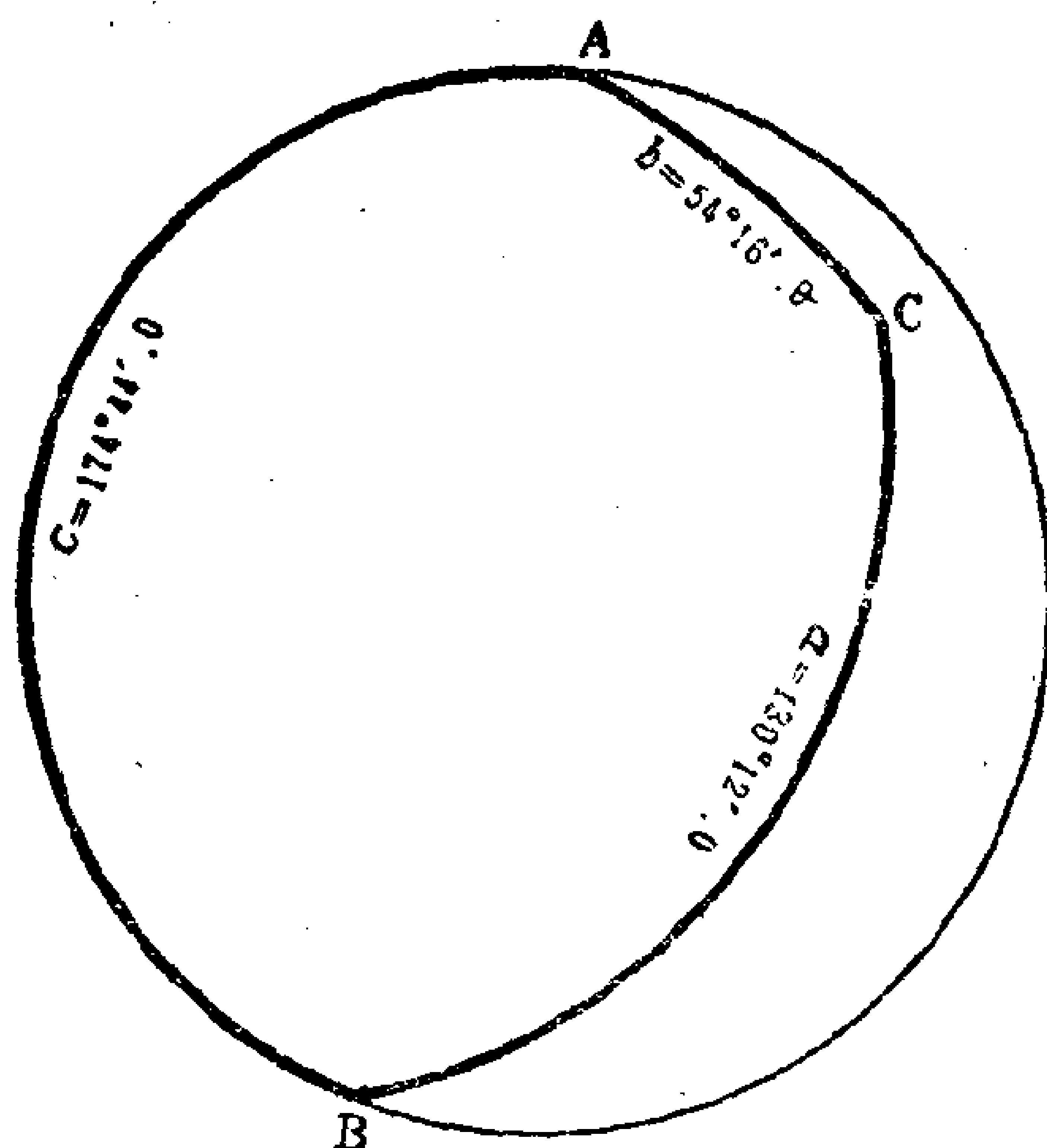
$$\cos B=(\cos b-\cos a\cdot\cos c)\cdot\csc a\cdot\csc c$$

$$\cos C=(\cos c-\cos a\cdot\cos b)\cdot\csc a\cdot\csc b$$

如前所述，三种方法的比較，以采用球面半角正切公式所得的結果較为精确，且查表手續亦較簡易。

例題 23. 設球面三角形 ABC，$a=130°12'$，$b=54°16'$，$c=174°44'$，解該球面三角形。

解 根据所給的条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形，从圖中可以估



（例題 23 附圖）

計出所求各角的值，均应大于 90°，而 C 角且接近于 180°，这和下面演算的結果是符合的。現在采用球面半角正切公式(10)进行演算：

$a=130°12'$	$b=54°16'$	$c=174°44'$	
$2p=359°12'$			
$p=179°36'$	$L\csc$ 2.15607	$L\csc$ 2.15607	$L\csc$ 2.15607
$p_a=49°24'$	$L\csc$ 0.11960	$L\sin$ 9.88040	$L\sin$ 9.88040
$p_b=125°20'$	$L\sin$ 9.91158	$L\csc$ 0.08842	$L\sin$ 9.91158
$p_c=4°52'$	$L\sin$ 8.92859	$L\sin$ 8.92859	$L\csc$ 1.07141

$2L\,\text{tg}\ 1.11584$ $\quad 2L\,\text{tg}\ 1.05348$ $\quad 2L\,\text{tg}\ 3.01946$

$L\,\text{tg}\ 0.55792$ $\quad L\,\text{tg}\ 0.52674$ $\quad L\,\text{tg}\ 1.50973$

$\frac{A}{2}=74°31'51''.6$ $\quad \frac{B}{2}=73°26'25''.2$ $\quad \frac{C}{2}=88°13'44''.1$

$A=149°03'43''.2$ $\quad B=146°52'50''.4$ $\quad C=176°27'28''.2$

本題采用球面半正矢公式的演算方法如下:

$a=130°12'$	$L\csc 0.11702$	$L\csc 0.11702$
$b=54°16'$	$L\csc 0.09058$	$L\csc 0.09058$
$c=174°44'$	$L\csc 1.03720$	$L\csc 1.03720$
$a+b+c=359°12'$		
$b+c-a=98°48'$	$\frac{1}{2}L\,\text{Hav}\ 4.88040$	$\frac{1}{2}L\,\text{Hav}\ 4.88040$
$a-b+c=250°40'$	$\frac{1}{2}L\,\text{Hav}\ 4.91158$	$\frac{1}{2}L\,\text{Hav}\ 4.91158$
$a+b-c=9°44'$	$\frac{1}{2}L\,\text{Hav}\ 3.92859$	$\frac{1}{2}L\,\text{Hav}\ 3.92859$
$L\,\text{Hav}\ 9.96795$	$L\,\text{Hav}\ 9.96321$	$L\,\text{Hav}\ 9.99958$
$A=149°03'40''$	$B=146°53'00''$	$176°25'<C<176°27'$

比較了上述兩种演算方法，可以明显地看出用正切函数求得的値是精确得多了。

7.3 已知三角的球面三角形解法

設已知球面三角形的三个角 $A\ B\ C$,(若其中有一角为 90°,則該三角形为球面直角三角法,它的解法已見例題17-19),解該三角形的方法有:

1)用球面半边正切公式（16）求 $a\ b\ c$ 各边的値，即

$$\text{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$$

$$\text{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$$

$$\text{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}}$$

2)用球面半边正切公式（13）求 $a\ b\ c$ 各边的値，即

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_A}{\cos P_B\cdot\cos P_C}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_B}{\cos P_A\cdot\cos P_C}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_C}{\cos P_A\cdot\cos P_B}}$$

3)用球面余弦公式求 $a\ b\ c$ 各边的値，即

$$\cos a=(\cos A+\cos B\cdot\cos C)\cdot\csc B\cdot\csc C$$

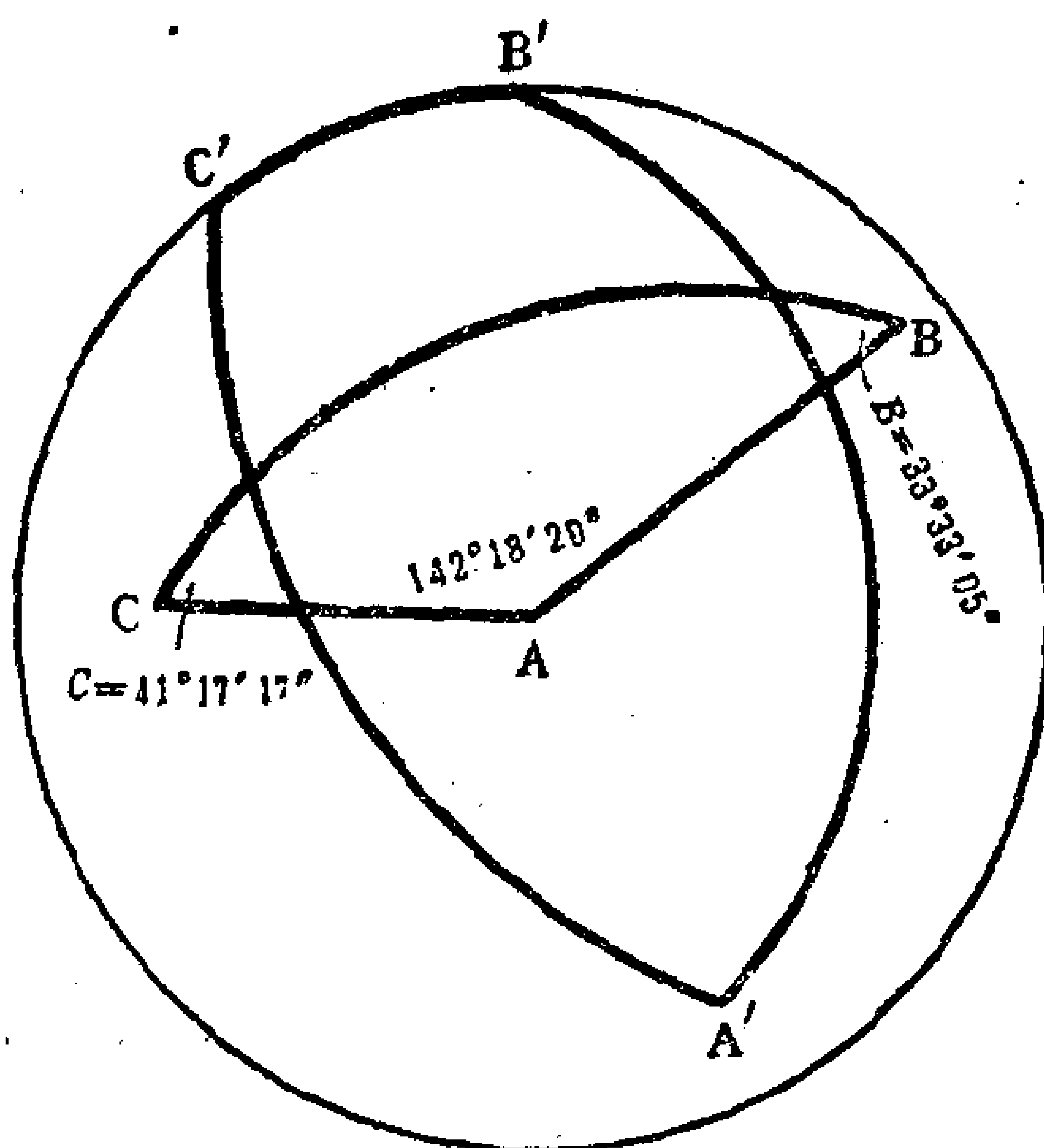
$$\cos b=(\cos B+\cos A\cdot\cos C)\cdot\csc A\cdot\csc C$$

$$\cos c=(\cos C+\cos A\cdot\cos B)\cdot\csc A\cdot\csc B$$

上面三种演算方法的比較，以采用球面半边正切公式（16）所得的結果較为精确，手續亦較簡易。

例題 24. 設球面三角形 ABC，$A=142°18'20''$，$B=33°33'05''$，$C=41°17'17''$，解該球面三角形。

解 根据所給条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形：



（例題 24 附圖）

从圖中可以估計出 b c 二边皆小于 90°，而 a 边則大于 90°。現在采用球面半边正切公式(16)进行演算：

$A=142°18'20''$	$B=33°33'05''$	$C=41°17'17''$	$E=37°08'42''$
$\frac{E}{2}=18°34'21''$	$L\sin 9.50311$	$L\sin 9.50311$	$L\sin 9.50311$
$A-\frac{E}{2}=123°43'59''$	$L\sin 9.91993$	$L\csc 0.08007$	$L\csc 0.08007$
$B-\frac{E}{2}=14°58'44''$	$L\csc 0.58760$	$L\sin 9.41240$	$L\csc 0.58760$
$C-\frac{E}{2}=22°42'56''$	$L\csc 0.41324$	$L\csc 0.41324$	$L\sin 9.58676$
	$2L\,\mathrm{tg}\, 20.42388$	$2L\,\mathrm{tg}\, 19.40882$	$2L\,\mathrm{tg}\, 19.75754$
	$L\,\mathrm{tg}\, 10.21194$	$L\,\mathrm{tg}\, 9.70441$	$L\,\mathrm{tg}\, 9.87877$
	$\frac{a}{2}=58°27'24''$	$\frac{b}{2}=26°51'12''$	$\frac{c}{2}=37°06'18''$
	$a=116°54'48''$	$b=53°42'24''$	$c=74°12'36''$

7.4 已知二边及其夾角的球面三角形解法

設已知球面三角形的二边 a b 及其夾角 C，(若其中有一边或一角为 90°，則該三角形为球面直边或直角三角形，它的解法見例題 17-21)，解該球面三角形的方法有

1)用訥比尔相似方程式(18)求 A B 及 c 的值，即

$$\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cdot\sec\frac{a+b}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cdot\csc\frac{a+b}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\csc\frac{A-B}{2}$$

2)用球面正弦、余弦公式、及五联关系式所导出的計算式求 B 及 c 的值，并用球面正弦公式求 A 的值，即

$$\mathrm{tg}\,M=\mathrm{tg}\,b\cdot\cos C$$

$$\mathrm{tg}\,B=\mathrm{tg}\,C\cdot\sin M\cdot\csc(a-M)$$

$$\mathrm{tg}\,c=\mathrm{tg}(a-M)\cdot\sec B$$

$$\sin A=\sin B\cdot\sin a\cdot\csc b$$

3）用球面半正矢公式（5）或球面半正矢补角公式（6）求 c 的值，用球面半正矢公式（7）或球面正弦公式（1）求 A 及 B 的值，即

$$\text{Hav}\, c = \text{Hav}\,(a-b) + \sin a \cdot \sin b \cdot \text{Hav}\, C$$

或 $$\text{Shav}\, c = \text{Shav}\,(a-b) \cdot \text{Shav}\, C + \text{Shav}\,(a+b) \cdot \text{Shav}\,(180^\circ - C)$$

$$\text{Hav}\, A = \csc b \cdot \csc c \sqrt{\text{Hav}\,(a+\overline{b-c}) \cdot \text{Hav}\,(a-\overline{b-c})}$$

$$\text{Hav}\, B = \csc a \cdot \csc c \sqrt{\text{Hav}\,(b+\overline{a-c}) \cdot \text{Hav}\,(b-\overline{a-c})}$$

或 $$\sin A = \sin C \cdot \sin a \cdot \csc c$$

$$\sin B = \sin C \cdot \sin b \cdot \csc c$$

以上三种解法的比較，从航海的实用观点考虑，由于要求的仅为夾角所对的边及該二已知边的一边的对角，所以常可采用第二种方法，这种方法在球面天文学中，解天文三角形时亦是常用的。至第三种方法，虽然曾广泛为航海界所采用，但它的缺点在于半正矢函数的角度接近于0°时，函数值的变化甚慢，而角度接近于180°时，其对数值的变化亦甚慢，因此在这样范圍所求得的值，誤差很大。球面正弦公式求值，演算虽很簡單容易，但当角度接近于90°时，其对数值变化甚慢，所求得的值不能精确；并且正弦函数的缺点还在于所給的是兩个相互成为补角的值，当角度接近于90°时，很难判断那一个值是适合問題的解。

例題 25. 設球面三角形 ABC，$a=86°53.'0$，$b=63°25.'2$，$C=105°18.'4$，解該球面三角形。

解 根据所給的条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形。

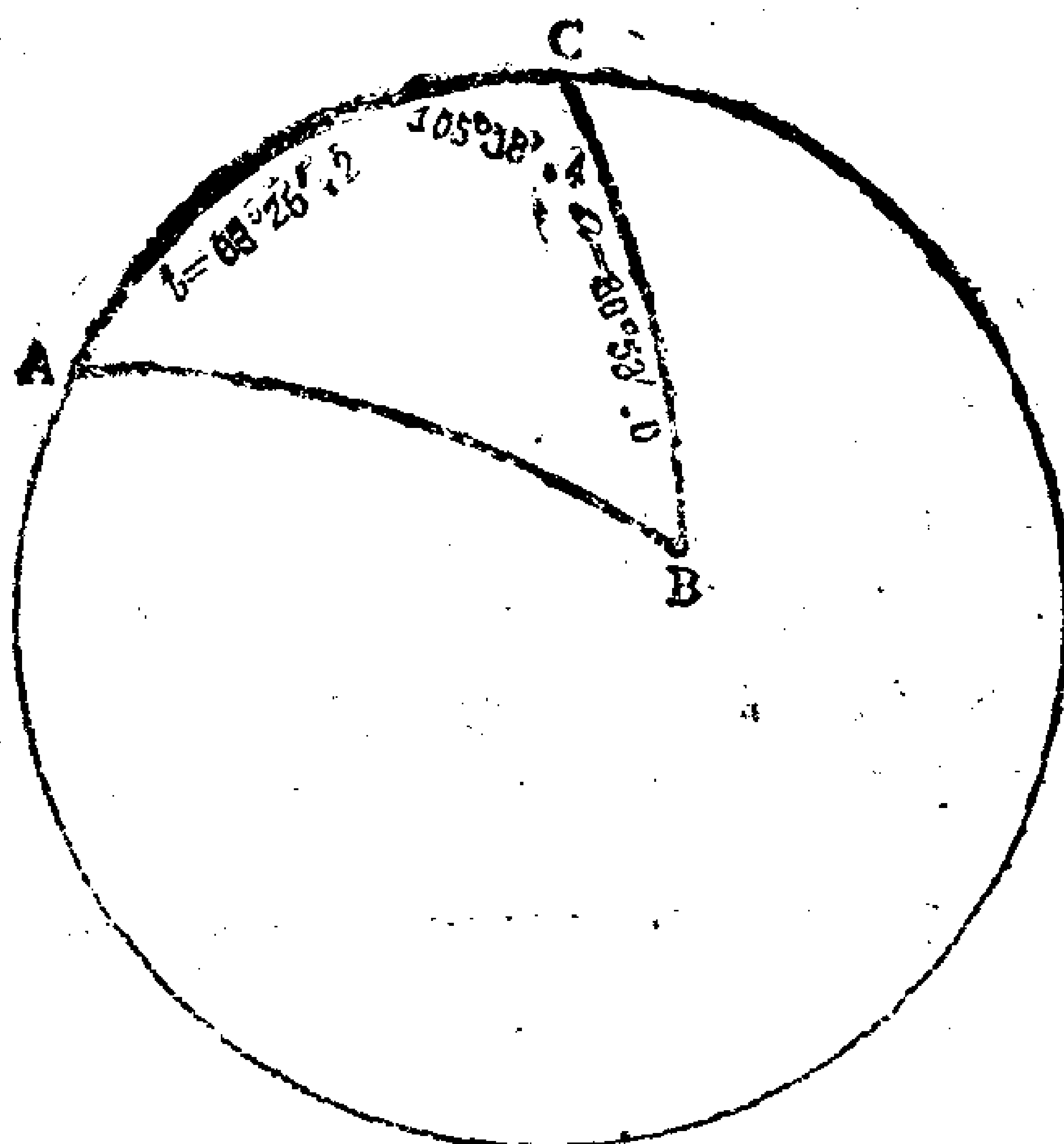
从圖中可以估計出 B 小于90°，而 A 接近于90°，c 边則大于90°。现在用訥比尔相似方程式（18）进行演算：

$$a=86°53.'0 \qquad \frac{a}{2}=43°26'36''$$

$$b=63°25.'2 \qquad \frac{b}{2}=31°42'36''$$

$\frac{1}{2}(a-b)=11°43'54''$ $L\cos 9.99083$ $L\sin 9.30820$ $L\,\text{tg}\, 9.31737$

$\frac{1}{2}(a+b)=75°09'06''$ $L\sec 0.59132$ $L\csc 0.01475$



（例題25附圖）

$C=105°18.'4$	$\frac{C}{2}=52°39'12''$	L ctg 9.88257	L ctg 9.88257
$A=80°11'16''$	$\frac{1}{2}(A+B)=71°04'07''$	L tg 0.46472	L sin 9.97585
$B=61°56'58''$	$\frac{1}{2}(A-B)=9°07'09''$	L tg 9.20552	L csc 0.80000
$c=102°12'18''$	$\frac{c}{2}=51°06'09''$		L tg 0.09322

本題如用第二种方法計算，所得結果，虽然相同，但判定 A 角的值，尤其当 A 角接近于 90° 的情况下，甚感困难而且不准确。下面的演算可以証实这样的結論。

$b=63°25'12''$	L tg 0.30074			L csc 0.04851
$C=105°18'24''$	L cos 9.42158n	L tg 0.56273n		
$M=152°10'58''$	L tg 9.72232n	L sin 9.66900		
$a=86°53'00''$				L sin 9.99936
$a-M=-65°17'58''$		L csc 0.04167n	L tg 0.33728n	
$B=61°56'58''$		L tg 0.27340	L sec 0.32767	L sin 9.94573
$c=120°12'18''$			L tg 0.66495n	
$80°11'13''<A<80°11'30''$				L sin 9.99360
$99°48'47''>A>99°48'30''$				

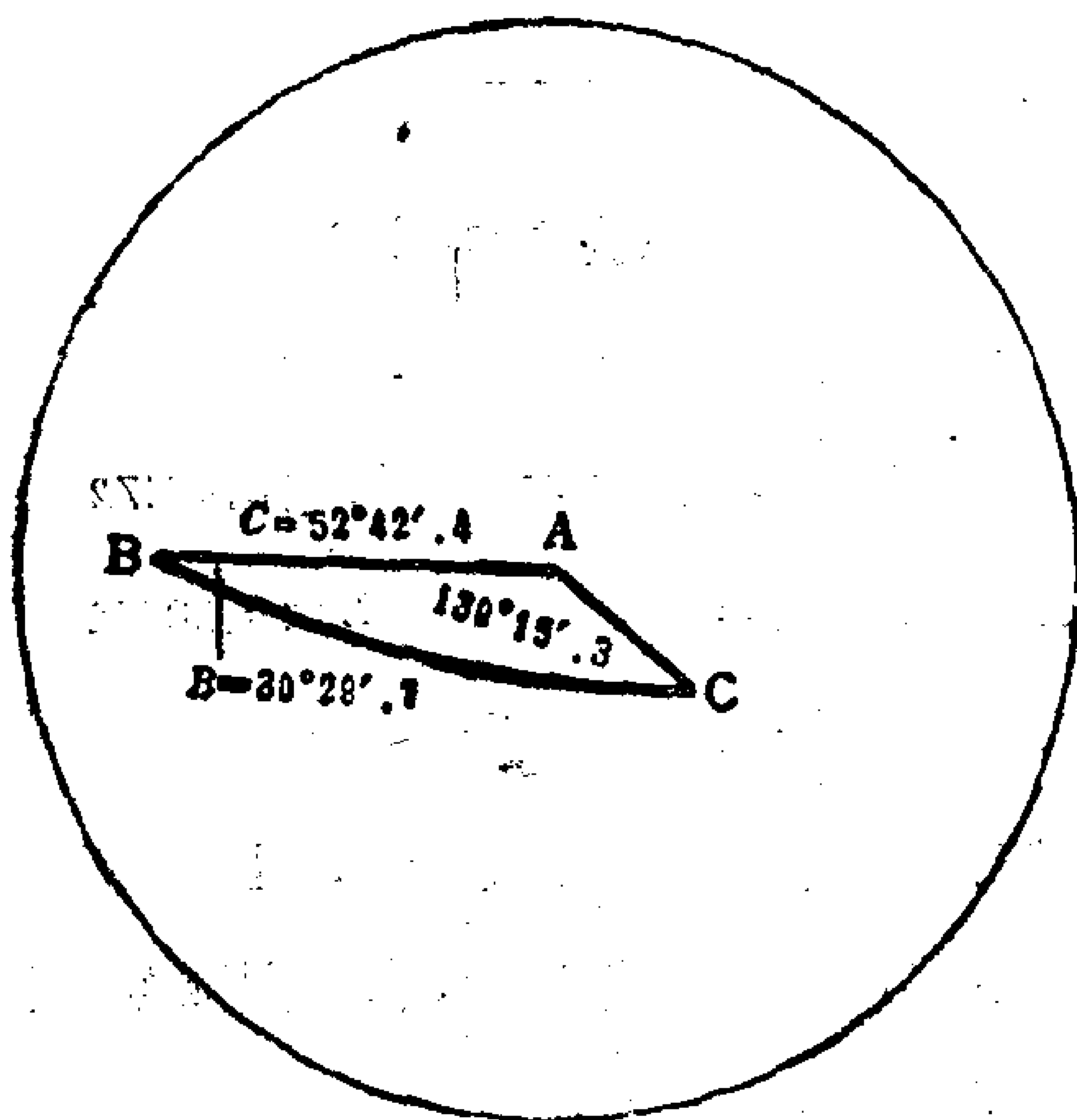
由球面三角形的性質判断，$a>b$，所以 $A>B$；但所得 A 的四个值都大于 B，而已知二边及其夾角的球面三角形却只能有一个解，因此必須通过其他方法計算，来确定 A 角的值。

7.5 已知二角及其夾边的球面三角形解法

設已知球面三角形的二角 A、B 及其夾边 c，（若其中的一角或一边为 90°，則該三角形为球面直角或直边三角形，其解法已見例題 17-21），解該球面三角形的方法，与解已知二边及其夾角的球面三角形的方法相似，以用訥比尔相似方程式演算，最为有利。

例題 26. 設球面三角形 ABC，$A=130°15'.3$，$B=30°29'.7$，$C=52°42'.4$，解該球面三角形。

解 根据所給条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形圖形。



（例題 26 附圖）

从圖中可以估計出 $C<90°$，$b<90°$，a 接近于 90°。演算的公式用納比尔相似方程式(18)，即

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sec\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\sin\frac{A-B}{2}\cdot\csc\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}\cdot\csc\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$A=130°15'.3$	$\frac{A}{2}=65°07'39''$			
$B=30°29'.7$	$\frac{B}{2}=15°14'51''$			
	$\frac{1}{2}(A-B)=49°52'48''$	$L\cos$ 9.80915	$L\sin$ 9.88349	$L\text{ctg}$ 9.92566
	$\frac{1}{2}(A+B)=80°22'30''$	$L\sec$ 0.77677	$L\csc$ 0.00616	
$c=52°42'.4$	$\frac{c}{2}=26°21'12''$	$L\text{tg}$ 9.69494	$L\text{tg}$ 9.69494	
$a=83°22'27''$	$\frac{1}{2}(a+b)=62°21'21''$	$L\text{tg}$ 0.28086		$L\csc$ 0.05264
$b=41°20'15''$	$\frac{1}{2}(a-b)=21°01'06''$		$L\text{tg}$ 9.58459	$L\sin$ 9.55469
$C=37°40'40''$	$\frac{C}{2}=18°50'20''$			$L\text{tg}$ 9.53299

7.6 已知二边及其一边对角的球面三角形解法

設已知球面三角形的二边 a、b 及其一边 a 的对角 A，（若其中的一边或一角为 90°，則該三角形为球面直边或直角三角形，它的解法已見例題 17—21），解該球面三角形的方法有

1)用球面正弦公式（1）求 B 的値，用訥比尔相似方程式（18）求 C 及 c 的値，即

$$\sin B=\csc a\cdot\sin b\cdot\sin A$$

$$\text{tg}\frac{C}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cdot\csc\frac{a+b}{2}\cdot\text{ctg}\frac{A-B}{2}$$

$$\text{tg}\frac{c}{2}=\text{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sec\frac{A-B}{2}$$

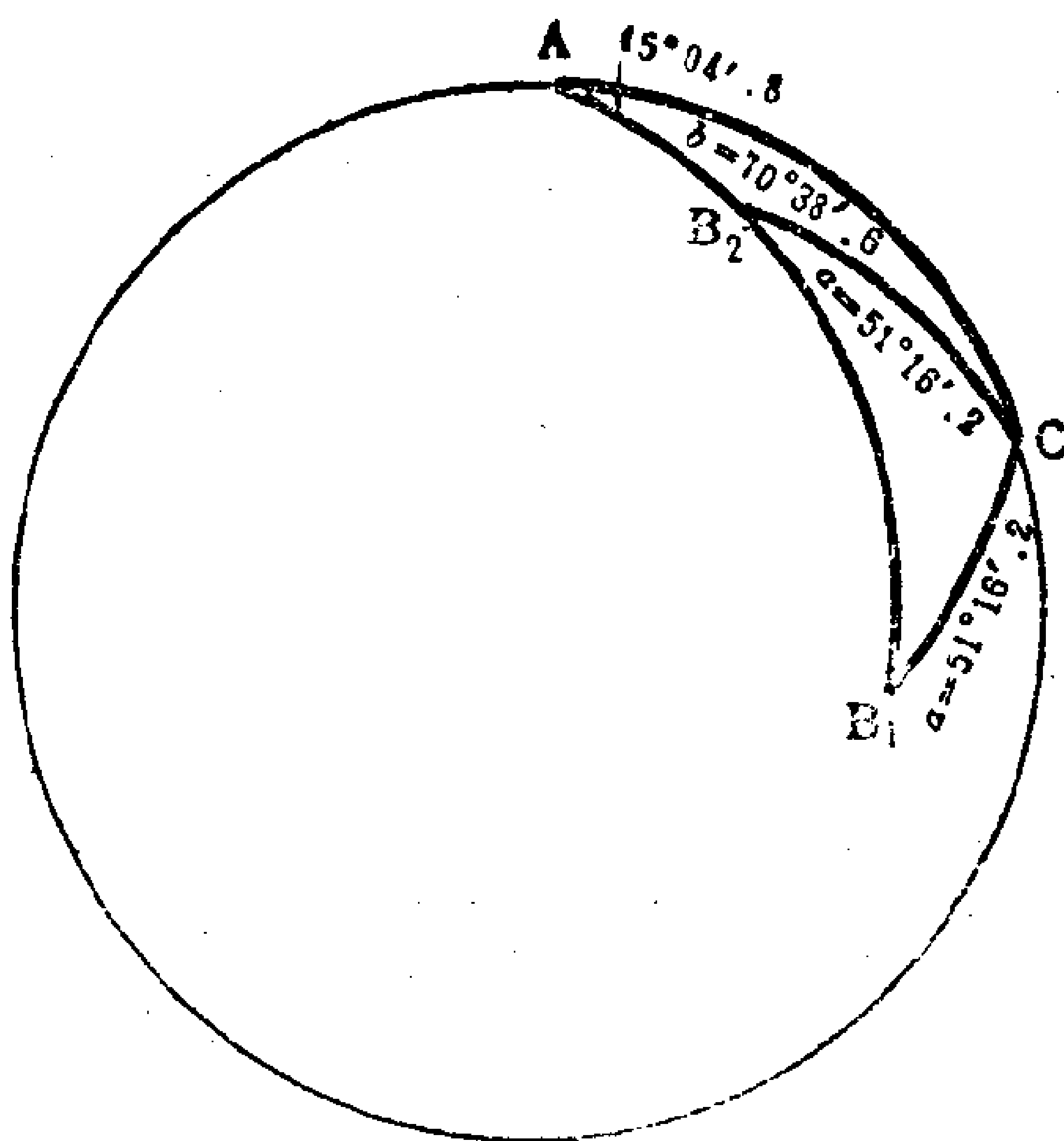
例題 27．設球面三角形 ABC，$a=51°16'.2$，$b=70°38'.6$，$A=45°04'.8$，解該球面三角形。

解 根据所給条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形。

从圖中可以估計出本題有二解：$B_1<90°$，C_1 及 c_1 大于 90°，而 $B_2>90°$，C_2 及 c_2 小于 90°。演算的公式为

$$\sin B=\sin b\cdot\csc a\cdot\sin A$$

$$\text{tg}\frac{C_1}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(b-a)\cdot\csc\tfrac{1}{2}(b+a)\cdot\text{ctg}\tfrac{1}{2}(B_1-A)$$



（例題 27 附圖）

$$\mathrm{tg}\frac{C_2}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(b-a)\cdot\csc\tfrac{1}{2}(b+a)\cdot\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(B_1+A)\text{❶}$$

$$\mathrm{tg}\frac{c_1}{2}=\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(b-a)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(B_1+A)\cdot\csc\tfrac{1}{2}(B_1-A)$$

$$\mathrm{tg}\frac{c_2}{2}=\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(b-a)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(B_1-A)\cdot\sec\tfrac{1}{2}(B_1+A)\text{❶}$$

---

❶ $B_2=180°-B_1$，$\frac{1}{2}(B_2-A)=\frac{1}{2}(180°-B_1-A)=90°-\frac{B_1+A}{2}$，所以 $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}(B_2-A)=\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B_1+A)$，$\csc\frac{1}{2}(B_2-A)=\sec\frac{1}{2}(B_1+A)$。

$\frac{1}{2}(B_2+A)=\frac{1}{2}(180°-B_1+A)=90°-\frac{B_1-A}{2}$，所以 $\sin\frac{1}{2}(B_2+A)=\cos\frac{1}{2}(B_1-A)$。

$b=70°38'.6$ $L\sin$ 9.97473

$a=51°16'.2$ $L\csc$ 0.10785

$A=45°04'.8$ $L\sin$ 9.85009

$B_1=58°54'45''$ $B_2=121°05'15''$ $L\sin$ 9.93267

$b=70°38'.6$ $\dfrac{b}{2}=35°19'18''$

$a=51°16'.2$ $\dfrac{a}{2}=25°38'06''$

$\frac{1}{2}(b-a)=9°41'12''$ $L\sin$ 9.22598 $L\sin$ 9.22958

$L\,\mathrm{tg}$ 9.23221 $L\,\mathrm{tg}$ 9.23221

$\frac{1}{2}(b+a)=60°57'24''$ $L\csc$ 0.05836 $L\csc$ 0.05836

$B_1=58°54'45''$ $B_2=121°05'15''$ $\dfrac{B_1}{2}=29°27'22''.5$

$A=45°04'.8$ $\dfrac{A}{2}=22°32'24''$

$\frac{1}{2}(B_1-A)=6°54'58''.5$ $L\,\mathrm{ctg}$ 0.91614 $L\csc$ 0.91930 $L\cos$ 9.99683

$\frac{1}{2}(B_1+A)=51°59'46''.5$ $L\,\mathrm{tg}$ 0.10713 $L\sin$ 9.89651 $L\sec$ 0.21062

$C_1=115°33'24''$ $\dfrac{C_1}{2}=57°46'42''.0$ $L\,\mathrm{tg}$ 0.20048

$C_2=34°27'18''$ $\dfrac{C_2}{2}=17°13'39''.0$ $L\,\mathrm{tg}$ 9.49147

$c_1=96°19'22''$ $\dfrac{c_1}{2}=48°09'41''.0$ $L\,\mathrm{tg}$ 0.04802

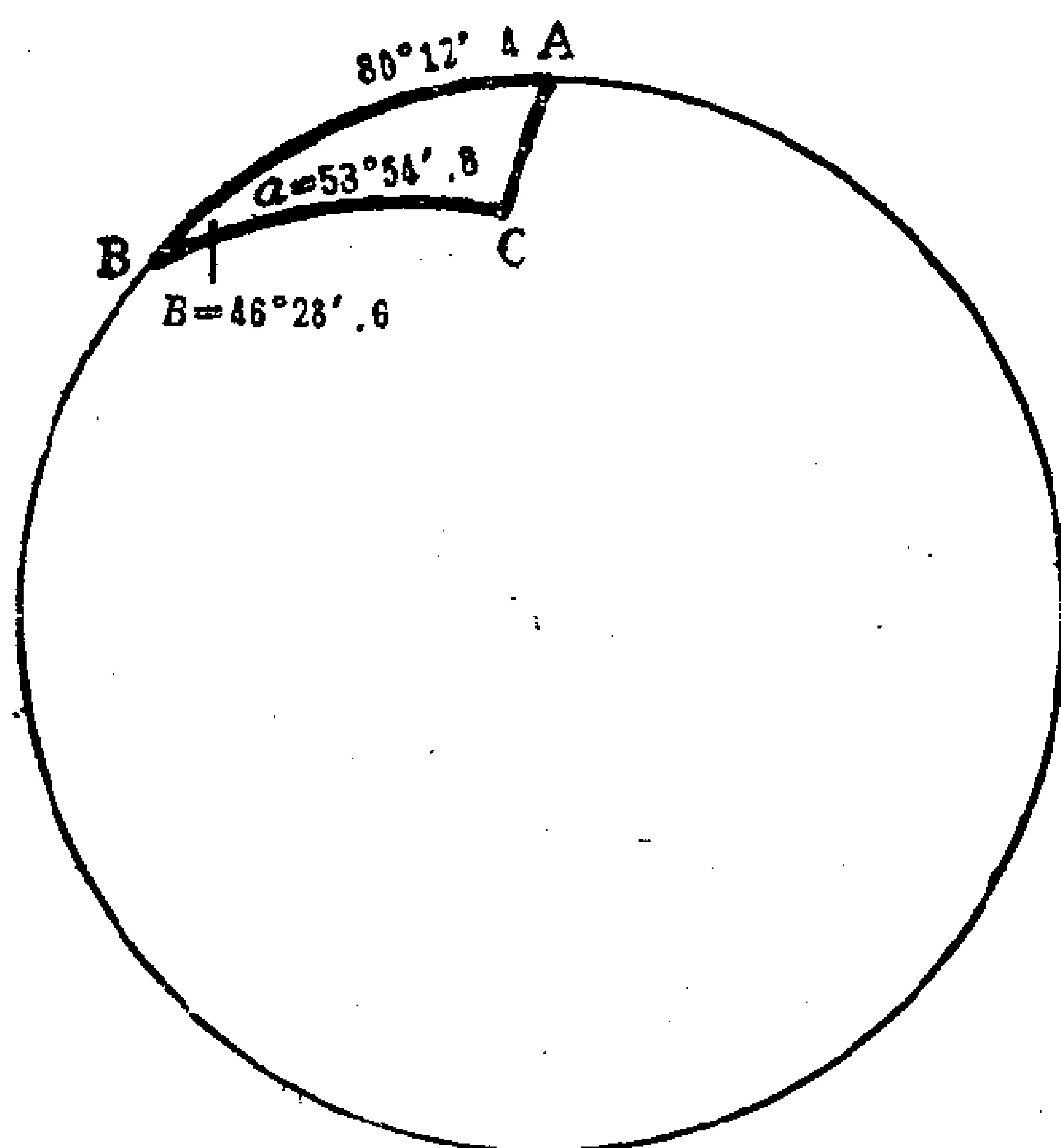
$c_2=30°46'40''$ $\dfrac{c_2}{2}=15°23'20''.0$ $L\,\mathrm{tg}$ 9.43966

7.7 已知二角及其一角对边的球面三角形解法

設已知球面三角形 ABC 的二角 A、B 及其一角 A 的对边 a，（若其中的一角或一边为 90°，則該三角形为球面直角或直边三角形，它的解法已見例題 17—21），解該球面三角形的方法和解已知二边及其一边对角的球面三角形方法相似，首先用球面正弦公式求出所給二角的另一对边，然后用訥比尔相似方程式求其余的一角及一边的值。

例題 23. 設球面三角形 ABC，$A=80°12'.4$，$B=46°28'.6$，$a=53°54'.8$，解該球面三角形。

解　根据所給条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形。



（例題 28 附圖）

从圖中可以估計出本題只能有一个解，且所求的值均应小于 90°。演算的公式为：

$$\sin b=\csc A\cdot\sin B\cdot\sin a$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\sec\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cdot\csc\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$A=80°12'.4$　　$L\csc$ 0.00637　　$\frac{A}{2}=40°46'.2$

$B=46°28'.6$　　$L\sin$ 9.86039　　$\frac{B}{2}=23°14'.3$

$\frac{1}{2}(A+B)=63°20'.5$　　$L\cos$ 9.65192

$\frac{1}{2}(A-B)=16°51'.9$　　$L\sec$ 0.01910　　$L\operatorname{ctg}$ 0.51833

$a=53°54'.6$　　$L\sin$ 9.90746　　$\frac{a}{2}=26°57'.3$

$b=36°29'.0$ $L\sin\ 9.77422$ $\frac{b}{2}=18°14'.5$

$\frac{1}{2}(a+b)=45°11'.8$ $\underline{L\,\mathrm{tg}\ 0.00298}$ $L\csc\ 0.14903$

$\frac{1}{2}(a-b)=3°42'.8$ $\underline{L\sin\ 9.18039}$

$c=50°32'.4$ $\frac{c}{2}=25°16'.2$ $L\,\mathrm{tg}\ 9.67400$

$C=70°18'.8$ $\frac{C}{2}=35°9'.4$ $L\,\mathrm{tg}\ 9.84775$

第三章　球面三角微分关系式

§8．球面三角微分关系式

球面三角形各要素間的相互关系是以球面三角公式来表示，这在第二章中已作了演証和講解。本章是在确定了球面三角形要素的关系之后，进一步研究球面三角形各要素微量变化的相互关系，表示这种微量变化关系的方程式，叫作球面三角微分关系式。

今由球面正弦公式（1）

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

上式的微分得

$$\frac{\cos a\cdot\sin A\cdot da-\sin a\cdot\cos A\cdot dA}{\sin^2 A}=\frac{\cos b\cdot\sin B\cdot db-\sin b\cdot\cos B\cdot dB}{\sin^2 B}$$

上式的左項乘以$\frac{\sin A}{\sin a}$，右項乘以$\frac{\sin B}{\sin b}$，由于$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}$，因此

$$\frac{\cos a\cdot\sin A\cdot da-\sin a\cdot\cos A\cdot dA}{\sin^2 A}\cdot\frac{\sin A}{\sin a}=$$

$$=\frac{\cos b\cdot\sin B\cdot db-\sin b\cdot\cos B\cdot dB}{\sin^2 B}\cdot\frac{\sin B}{\sin b}$$

化簡之，得

$$\operatorname{ctg} a\cdot da-\operatorname{ctg} A\cdot dA=\operatorname{ctg} b\cdot db-\operatorname{ctg} B\cdot dB$$

同理　$$\operatorname{ctg} a\cdot da-\operatorname{ctg} A\cdot dA=\operatorname{ctg} c\cdot dc-\operatorname{ctg} C\cdot dC$$

所以　$$\operatorname{ctg} a\cdot da-\operatorname{ctg} A\cdot dA=\operatorname{ctg} b\cdot db-\operatorname{ctg} B\cdot dB=$$

$$=\operatorname{ctg} c\cdot dc-\operatorname{ctg} C\cdot dC \qquad (27)$$

由球面三角微分关系式(27)，可以看出，球面三角形的边与其所对的角的微分关系是：球面三角形边的微分与該边余切的乘积减去对角的

微分与该角余切的乘积是一个常数。

今由球面余弦公式（3）

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

上式的微分，得

$$\sin a\cdot da=(\sin b\cdot\cos c-\cos b\cdot\sin c\cdot\cos A)db$$
$$+(\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A)dc+\sin b\cdot\sin c\cdot\sin A\cdot dA$$

但由球面五联关系式（2）有

$$\sin a\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A$$
$$\sin a\cdot\cos C=\cos c\cdot\sin b-\sin c\cdot\cos b\cdot\cos A$$

所以

$$\sin a\cdot da=\sin a\cdot\cos C\cdot db+\sin a\cdot\cos B\cdot dc+\sin b\cdot\sin c\cdot\sin A\cdot dA$$

化简之，得球面三角形二边及其夹角对第三边的微分关系式

$$\left.\begin{aligned}
&da=\cos C\cdot db+\cos B\cdot dc+\sin b\cdot\sin C\cdot dA\\
&\qquad(\text{或}+\sin c\cdot\sin B\cdot dA)\\
\text{同理}\quad &db=\cos A\cdot dc+\cos C\cdot da+\sin c\cdot\sin A\cdot dB\\
&\qquad(\text{或}+\sin a\cdot\sin C\cdot dB)\\
&dc=\cos B\cdot da+\cos A\cdot db+\sin a\cdot\sin B\cdot dC\\
&\qquad(\text{或}+\sin b\cdot\sin A\cdot dC)
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

今以极线三角形的关系代入球面三角微分关系式(28)，则得球面三角形二角及其夹边对第三角的微分关系式：

$$\left.\begin{aligned}
&dA=\sin b\cdot\sin C\cdot da-(\cos c\cdot dB+\cos b\cdot dC)\\
\text{或}\quad &dA=\sin c\cdot\sin B\cdot da-(\cos c\cdot dB+\cos b\cdot dC)\\
&dB=\sin c\cdot\sin A\cdot db-(\cos a\cdot dC+\cos c\cdot dA)\\
\text{或}\quad &dB=\sin a\cdot\sin C\cdot db-(\cos a\cdot dC+\cos c\cdot dA)\\
&dC=\sin a\cdot\sin B\cdot dc-(\cos b\cdot dA+\cos a\cdot dB)\\
\text{或}\quad &dC=\sin b\cdot\sin A\cdot dc-(\cos b\cdot dA+\cos a\cdot dB)
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

今由球面四联关系式（4）

$$\mathrm{ctg}a\cdot\sin b=\mathrm{ctg}A\cdot\sin C+\cos b\cdot\cos C$$

上式的微分，得

$$\mathrm{ctg}a\cdot\cos b\cdot db-\csc^2 a\cdot\sin b\cdot da=-\csc^2 A\cdot\sin C\cdot dA+\mathrm{ctg}A\cdot\cos C\cdot dC-$$

$$-\sin b\cdot\cos C\cdot db-\cos b\cdot\sin C\cdot dC$$

化简之，得

$$\frac{\sin b}{\sin^2 a}\cdot da=\frac{\cos c}{\sin a}\cdot db+\frac{\cos B}{\sin A}\cdot dC+\frac{\sin C}{\sin^2 A}\cdot dA$$

但
$$\frac{\sin b}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin a}$$

所以 $$\frac{\sin B}{\sin a\cdot\sin A}\cdot da=\frac{\cos c}{\sin a}\cdot db+\frac{\cos B}{\sin A}\cdot dC+\frac{\sin C}{\sin a\cdot\sin A}\cdot dA$$

即球面三角形四联要素的微分关系式

同理

$$\left.\begin{aligned}
\sin B\cdot da&=\sin A\cdot\cos c\cdot db+\sin a\cdot\cos B\cdot dC+\sin c\cdot dA\\
\sin C\cdot da&=\sin A\cdot\cos b\cdot dc+\sin a\cdot\cos C\cdot dB+\sin b\cdot dA\\
\sin C\cdot db&=\sin B\cdot\cos a\cdot dc+\sin b\cdot\cos C\cdot dA+\sin a\cdot dB\\
\sin A\cdot db&=\sin B\cdot\cos c\cdot da+\sin b\cdot\cos A\cdot dC+\sin c\cdot dB\\
\sin A\cdot dc&=\sin C\cdot\cos b\cdot da+\sin c\cdot\cos A\cdot dB+\sin b\cdot dC\\
\sin B\cdot dc&=\sin C\cdot\cos a\cdot db+\sin c\cdot\cos B\cdot dA+\sin a\cdot dC
\end{aligned}\right\}(30)$$

从以上四个球面三角微分关系式，可以得出球面三角形任意三个要素的微量变化，对于另外一个任意要素的影响。这对于以后研究球面三角形或天文三角形的誤差是很有用的。

第四章　球面角盈及球面三角形面积

§9.　球　面　角　盈

9.1　球面角盈

球面三角形三个角的和，必小于 540°，而大于 180°，其超出 180° 的部份，叫作球面角盈，并用 E 表示之，即

$$E=A+B+C-180^\circ \qquad (31)$$

但球面角盈亦可用边的函数来表示。下面就是几个用边的函数表示球面角盈的公式。

9.2　加諾里(Cagnoli)球面角盈公式

由球面半边公式(14)

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}}$$

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin C}}$$

兩式相乘得　$\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{E}{2}}{\sin C}\cdot\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin B}}$

但由球面半边公式(15)

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin B}}$$

所以 $$\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{E}{2}}{\sin C}\cdot\cos\frac{c}{2}$$

即 $$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin C$$

$$=\frac{\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

但由球面半角公式(8)及(9)

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin P_a\cdot\sin P_b}{\sin a\cdot\sin b}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin P\cdot\sin P_c}{\sin a\cdot\sin b}}$$

所以 $$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\sin P_a\cdot\sin P_b}{\sin a\cdot\sin b}}\cdot\sqrt{\frac{\sin P\cdot\sin P_c}{\sin a\cdot\sin b}}$$

化簡之，得加諾里球面角盈公式

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sin P\cdot\sin P_a\cdot\sin P_b\cdot\sin P_c}}{\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}} \qquad (32)$$

9.3 留里尔(Lhuilier)球面角盈公式

由德朗布尔方程式(17)

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

故
$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad (\text{I})$$

又由公式(17)
$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

故
$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad (\text{II})$$

(II)÷(I)得
$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

但
$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}$$

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\cdot\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cdot\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}$$

$$\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\sqrt{\frac{\sin P\cdot\sin P_c}{\sin P_a\cdot\sin P_b}}$$

所以
$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\cdot\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cdot\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\cdot\sqrt{\frac{\sin P\cdot\sin P_c}{\sin P_a\cdot\sin P_b}}$$

化简之，得留里尔球面角盈公式

$$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{P}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{P_a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{P_b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{P_c}{2}} \qquad (33)$$

9.4 欧勒(Euler)球面角盈公式

由德朗布尔方程式(17)

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2} \qquad (\mathrm{II})$$

$(\mathrm{I})\times\cos\frac{C}{2}+(\mathrm{II})\times\sin\frac{C}{2}$ 得

$$\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos^2\frac{C}{2}+\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin^2\frac{C}{2}$$

化简之，得

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos C}{\cos\frac{c}{2}}$$

但

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\sin\tfrac{1}{2}(180^\circ+E)$$

$$=\cos\frac{E}{2}$$

而

$$\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos C=\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\frac{\cos c-\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}$$

$$=\frac{\cos c-\left(2\cdot\cos^2\frac{a}{2}-1\right)\cdot\left(2\cos^2\frac{b}{2}-1\right)}{4\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{\cos c-4\cos^2\frac{a}{2}\cdot\cos^2\frac{b}{2}+\cos a+\cos b+1}{4\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}}$$

所以

$$\cos\frac{E}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}+\frac{\cos c-4\cos^2\frac{a}{2}\cdot\cos^2\frac{b}{2}+\cos a+\cos b+1}{4\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}}}{\cos\frac{c}{2}}$$

化簡之，得欧勒球面角盈公式

$$\cos\frac{E}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}} \qquad (34)$$

§10. 球面三角形面积

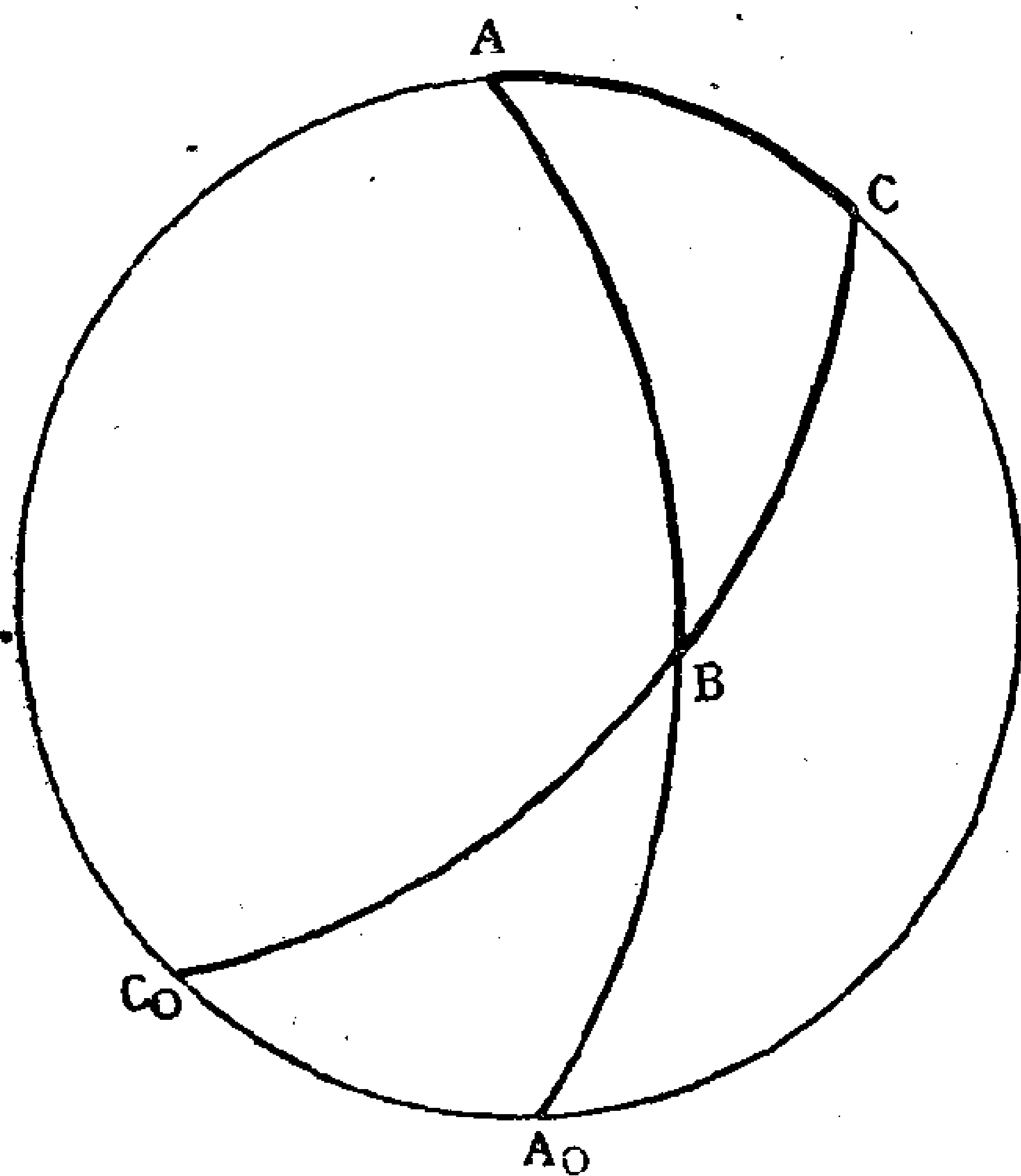


圖 21

由上圖（圖 21）可以看出，球面三角形 ABC 的面积，等于球面二角形 A 的面积減去 A_0BC 的面积；或等于球面二角形 B 的面积減去 AB_0C（即 A_0BC_0）的面积；或等于球面二角形 C 的面积減去 ABC_0 的面积。今由球面几何已知球面二角形的面积为 $\frac{\pi R^2}{90^\circ}\cdot\alpha^\circ$，其中 R 为球的半徑，α° 为球面角。設以 $S_{ABC}, S_{A_0BC}, S_{AB_0C}, S_{ABC_0}$ 表示球面三角形 ABC, A_0BC, AB_0C, ABC_0 的面积，則

$$S_{ABC}=\frac{\pi R^2}{90^\circ}\cdot A^\circ-S_{A_0BC}$$

$$S_{ABC}=\frac{\pi R^2}{90^\circ}\cdot B^\circ-S_{AB_0C}\ (\text{即}\ S_{A_0BC_0})$$

$$S_{ABC}=\frac{\pi R^2}{90^\circ}\cdot C^\circ-S_{ABC_0}$$

三式相和得

$$3S_{ABC}=\frac{\pi R^2}{90^\circ}\cdot(A+B+C)-(S_{A_0BC}+S_{AB_0C}+S_{ABC_0})$$

$$=\frac{\pi R^2}{90^\circ}(A+B+C)-(2\pi R^2-S_{ABC})$$

化簡之，得球面三角形面积公式

$$S_{ABC}=\frac{\pi R^2}{180^\circ}\cdot(A+B+C)-\pi R^2$$

$$=\frac{\pi R^2}{180^\circ}(A+B+C-180^\circ)$$

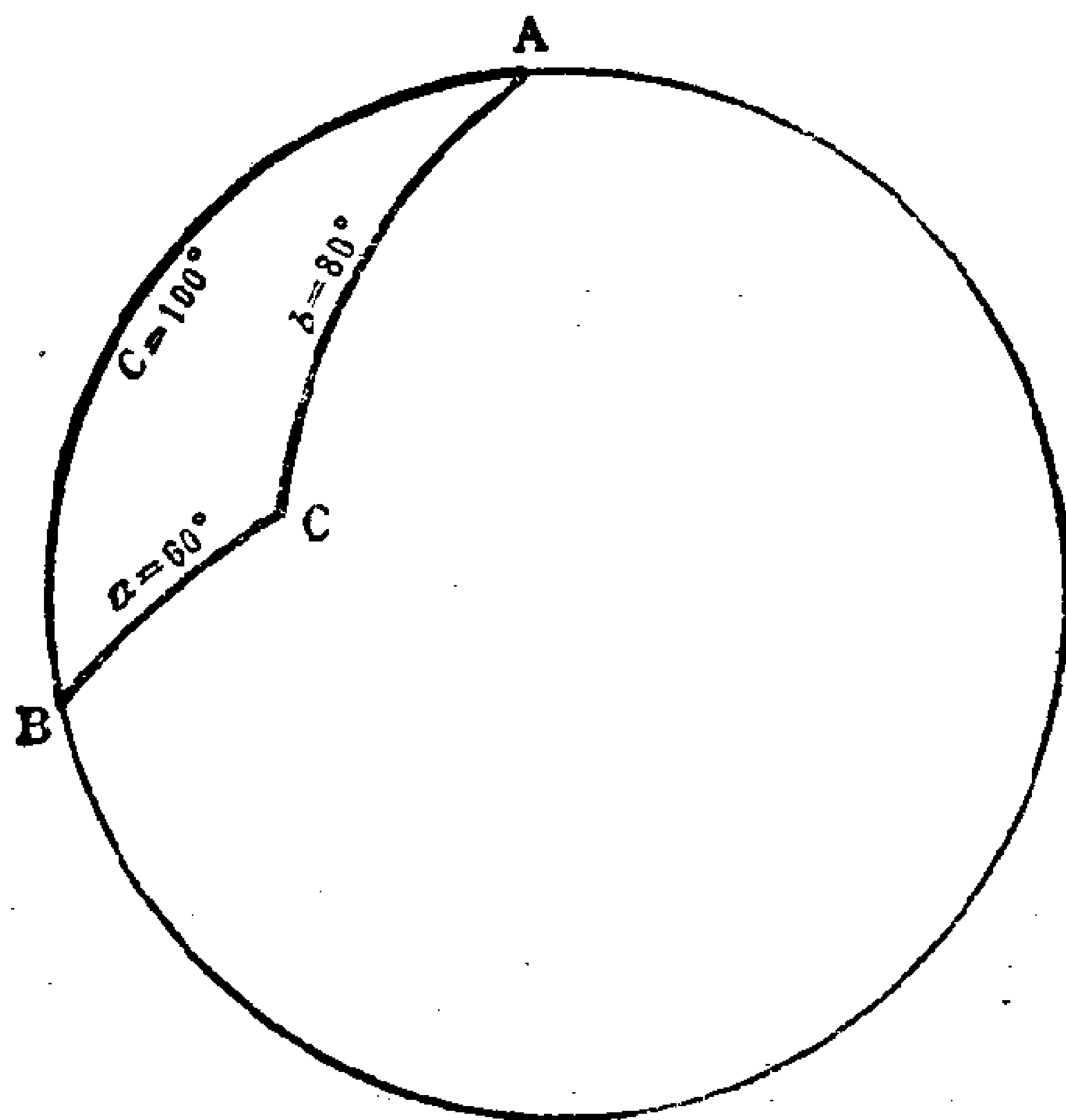
$$=\frac{\pi R^2}{180^\circ}\cdot E \qquad (35)$$

例題 29. 設球面三角形 ABC，$a=60^\circ, b=80^\circ, c=100^\circ$，球的半徑 $R=6370$ 公里，求該球面三角形的面积。

解　用留里尔球面角盈公式(33)

$$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{P}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{P_a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{P_b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{P_c}{2}}$$

計算出球面角盈 E 的值，然后用球面三角形面积公式(35)



（例題 29 附圖）

$$S_{ABC}=\frac{\pi R^2}{180^\circ}\cdot E$$

計算出該球面三角形的面积。

$a=60^\circ$

$b=80^\circ$

$c=100^\circ$

$2P=240^\circ$			$\pi=3.14159$	log 0.49715
$P=120^\circ$	$\frac{P}{2}=60^\circ$	Ltg 10.23856	$R=6370$	2log 7.60828
$P_a=60^\circ$	$\frac{P_a}{2}=30^\circ$	Ltg 9.76144	$E=56^\circ.864$	log 1.75484
$P_b=40^\circ$	$\frac{P_b}{2}=20^\circ$	Ltg 9.56107	180°	C-log $\overline{3}$.74473
$P_c=20^\circ$	$\frac{P_c}{2}=10^\circ$	Ltg 9.24632	$S_{ABC}=40.272,000(\text{km})^2$	log 7.60500
		2 | 18.80739		

$E=56^\circ.864$ $\frac{E}{4}=14^\circ.216$ Ltg 9.40370

第五章　球面內切圓及球面外接圓

§ 11．球面內切圓及球面外接圓

11.1　球面內切圓、球面外接圓、球面半徑

設一球面小圓位于球面三角形之內，小圓的周与三角形的三边相切（圖 22*a*），該小圓叫作球面三角形的**球面內切圓**。設小圓的周与球面三角形三个頂点相接（圖 22*b*），則該小圓叫作球面三角形的**球面外接圓**。由球面小圓的周到它的極的球面距离，叫作**球面半徑**。今以 ρ_1 表示球面內切圓的球面半徑，ρ_c 表示球面外接圓的球面半徑。

球面內切圓半徑及球面外接圓半徑均可用球面三角形的边或角的函数表示之。

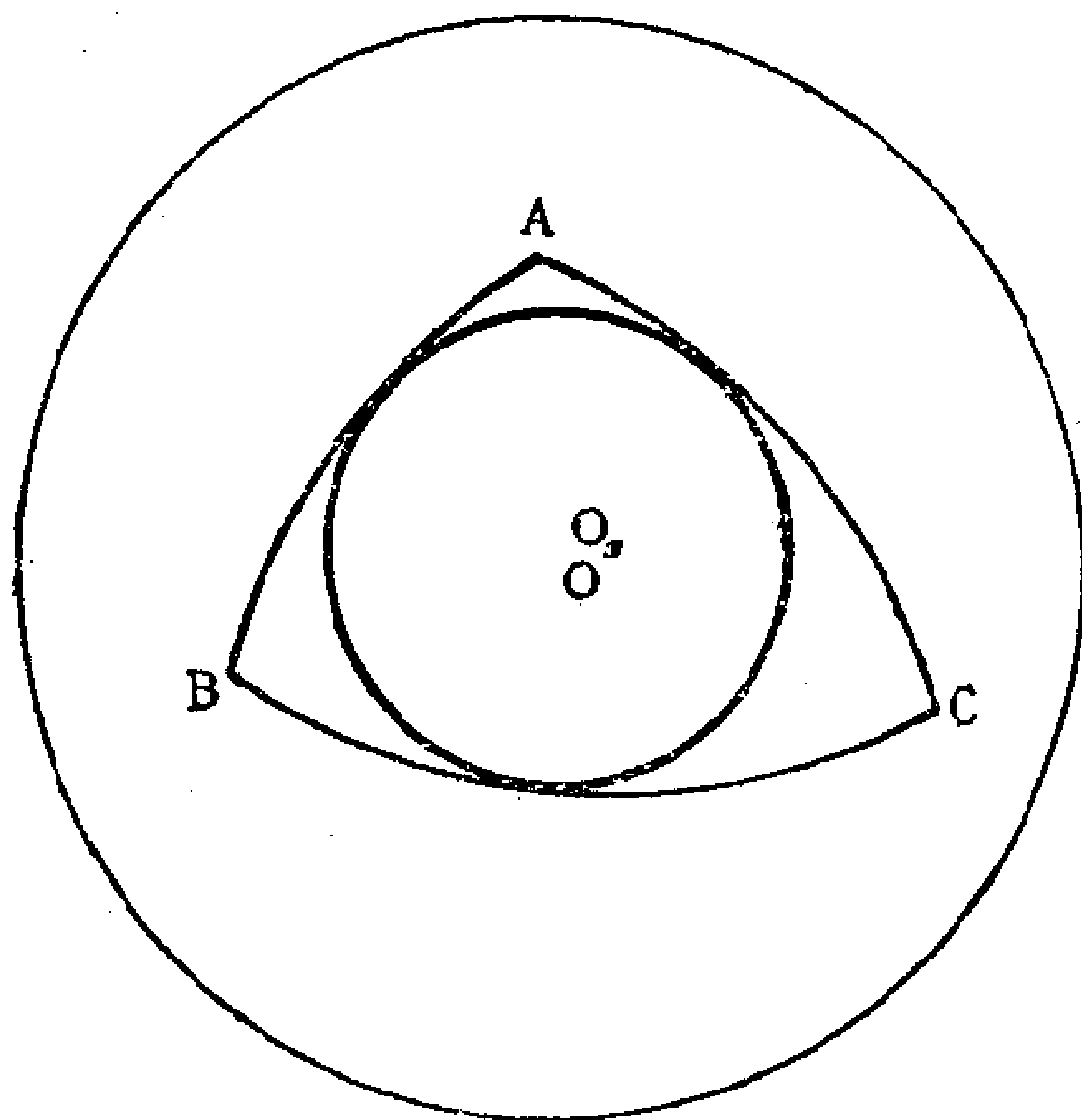


圖 22*a*

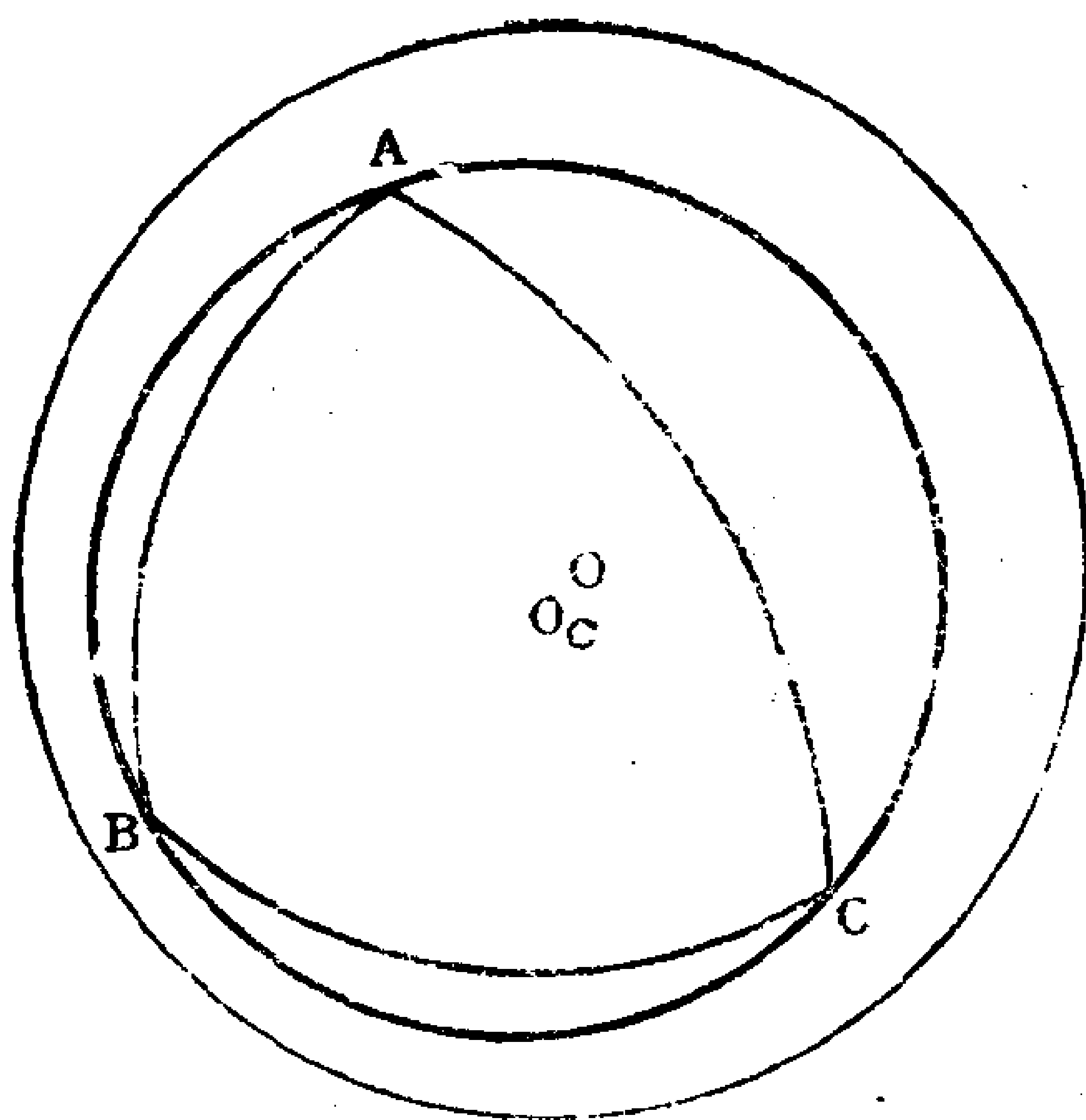


圖 22b

11.2 球面內切圓半徑公式

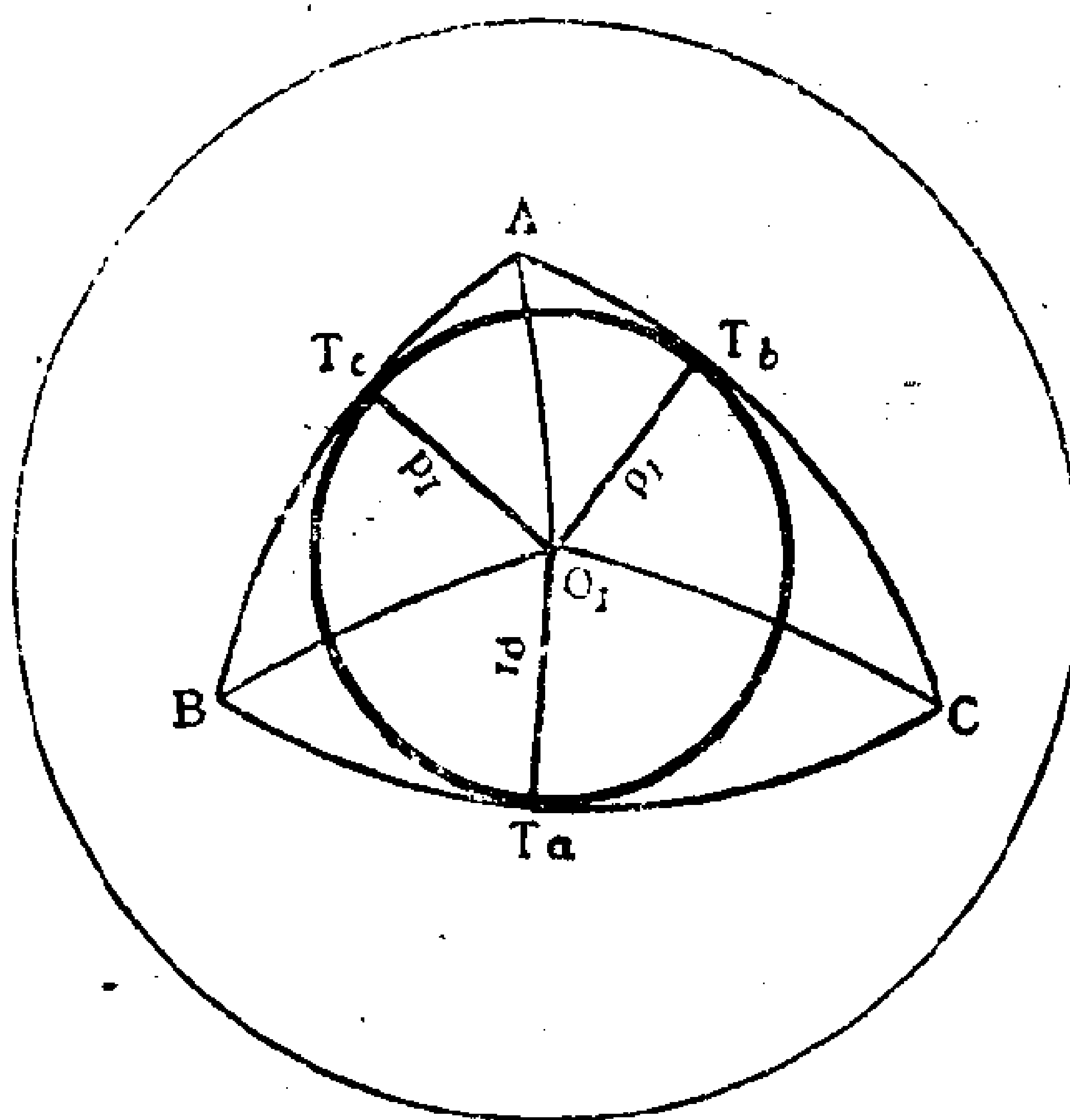


圖 23

圖 23，O_I 为球面三角形 ABC 的內切圓的極。內切圓切 a、b、c 的边于 T_a、T_b、T_c 等点。

今 $\overset{\frown}{AT_b}=\overset{\frown}{AT_c}$ $\qquad O_I\widehat{AT_b}=O_I\widehat{AT_c}=\frac{A}{2}$

$\overset{\frown}{BT_c}=\overset{\frown}{BT_a}$ $\qquad O_I\widehat{BT_c}=O_I\widehat{BT_a}=\frac{B}{2}$

$\overset{\frown}{CT_a}=\overset{\frown}{CT_b}$ $\qquad O_I\widehat{CT_a}=O_I\widehat{CT_b}=\frac{C}{2}$

但 $$\overset{\frown}{AT_b}+\overset{\frown}{BT_c}+\overset{\frown}{CT_a}=\overset{\frown}{AT_c}+\overset{\frown}{BT_a}+\overset{\frown}{CT_b}=p$$

故
$$\begin{aligned}\overset{\frown}{AT_b}&=p-\overset{\frown}{BT_c}-\overset{\frown}{CT_a}\\&=p-\overset{\frown}{BT_a}-\overset{\frown}{CT_a}\\&=p-a\\&=p_a\end{aligned}$$

今由球面直角三角形 AO_IT_b 得

$$\operatorname{tg}\overset{\frown}{O_IT_b}=\sin\overset{\frown}{AT_b}\cdot\operatorname{tg}O_I\widehat{AT_b}$$

即 $$\operatorname{tg}\overset{\frown}{O_IT_b}=\sin p_a\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

但由球面半角公式(10)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_a}}$$

代入上式并化简之，得球面内切圆半径公式

$$\operatorname{tg}\rho_I=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p}} \tag{36}$$

又由德朗布尔方程式(17)

$$\sin\frac{b+c}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\cos\frac{B-C}{2} \tag{I}$$

$$\cos\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\cos\frac{B+C}{2} \tag{II}$$

(Ⅰ)× $\cos\frac{a}{2}$ −(Ⅱ)× $\sin\frac{a}{2}$并化简之，得

$$\sin p_a=\frac{\sqrt{-\cos P\cdot\cos P_A\cdot\cos P_B\cdot\cos P_C}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}} \qquad (\text{Ⅲ})$$

由球面直角三角形 APT_b 已証

$$\mathrm{tg}\rho_I=\sin p_a\cdot\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

以(Ⅲ)代入并化简之，则得**球面內切圓半徑公式**

$$\mathrm{tg}\rho_I=\frac{\sqrt{-\cos P\cdot\cos P_A\cdot\cos P_B\cdot\cos P_C}}{2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}} \qquad (37)$$

但 $P=90°+\frac{E}{2}$, $\quad P_A=90°-\left(A-\frac{E}{2}\right)$,

$$P_B=90°-\left(B-\frac{E}{2}\right),\quad P_C=90°-\left(C-\frac{E}{2}\right)$$

將上述关系代入(37)，**則球面內切圓半徑公式**

$$\mathrm{tg}\rho_I=\frac{\sqrt{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}{2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}} \qquad (38)$$

11.3 球面外接圓半徑公式

圖 24，O_c 为球面三角形 ABC 的外接圓的極。由 O_c 作大圓弧 O_cM_a，O_cM_b，O_cM_c 分别垂直于球面三角形的边 a、b，c，則 M_a，M_b，M_c 为各該三边的中分点。即

$$\overset{\frown}{BM_a}=\overset{\frown}{CM_a}=\frac{a}{2}$$

$$\overset{\frown}{CM_b}=\overset{\frown}{AM_b}=\frac{b}{2}$$

$$\overset{\frown}{AM_c}=\overset{\frown}{BM_c}=\frac{c}{2}$$

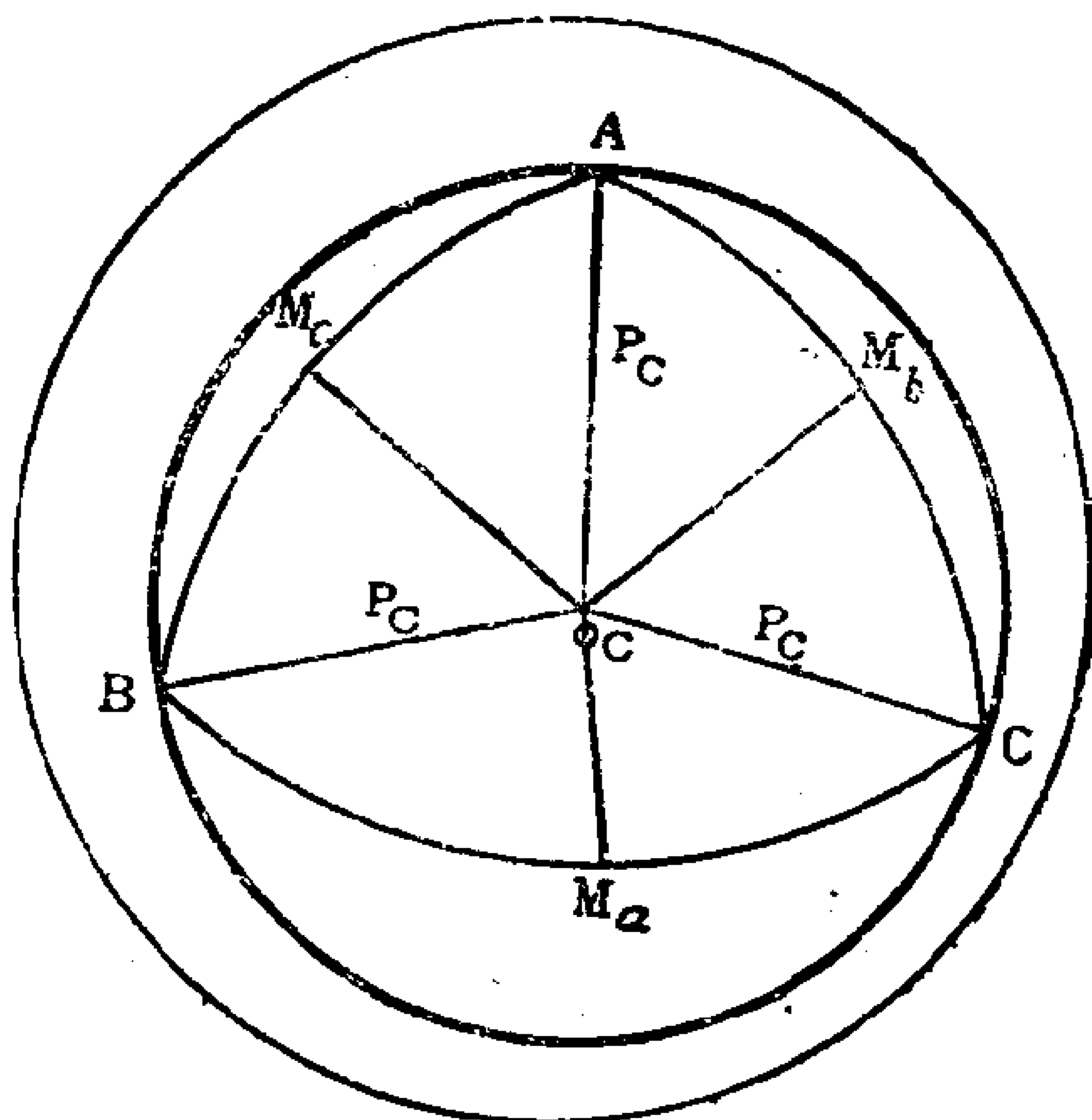


圖 24

今 $$\widehat{O_cA}=\widehat{O_cB}=\widehat{O_cC}=\rho_c$$

故 $$O_c\widehat{A}M_b=O_c\widehat{C}M_b$$

$$O_c\widehat{B}M_c=O_c\widehat{A}M_c$$

$$O_c\widehat{C}M_a=O_c\widehat{B}M_a$$

但 $$O_c\widehat{A}M_b+O_c\widehat{B}M_c+O_c\widehat{C}M_a+O_c\widehat{C}M_b+O_c\widehat{A}M_c+O_c\widehat{B}M_a=$$
$$=(A+B+C)$$

故 $$O_c\widehat{A}M_b+O_c\widehat{B}M_c+O_c\widehat{C}M_a=\frac{1}{2}(A+B+C)$$

$$O_c\widehat{A}M_b=\frac{1}{2}(A+B+C)-O_c\widehat{B}M_c-O_c\widehat{C}M_a$$

$$=\frac{1}{2}(A+B+C)-O_c\widehat{B}M_c-O_c\widehat{B}M_a$$

$$=\frac{1}{2}(A+B+C)-B$$

$$=\frac{A+C}{2}-\frac{B}{2}$$

今由球面直角三角形 O_cAM_b 得

$$\operatorname{tg}\widehat{PA}=\frac{\operatorname{tg}\widehat{AM_b}}{\cos O_c\widehat{A}M_b}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}-\frac{B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A+C}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}$$

但德朗布尔方程式(17)

$$\cos\frac{A+C}{2}=\frac{\cos\frac{a+c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\cdot\sin\frac{B}{2}\qquad(\text{I})$$

$$\sin\frac{A+C}{2}=\frac{\cos\frac{a-c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\cdot\cos\frac{B}{2}\qquad(\text{II})$$

$(\text{I})\times\cos\frac{B}{2}+(\text{II})\times\sin\frac{B}{2}$，则

$$\cos\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A+C}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}=$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\cdot\left(\cos\frac{a+c}{2}+\cos\frac{a-c}{2}\right)$$

于是 $\operatorname{tg}\widehat{PA}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\dfrac{\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\cdot\left(\cos\frac{a+c}{2}+\cos\frac{a-c}{2}\right)}$

化簡之，得球面外接圓半徑公式

$$\operatorname{tg}\rho_c=\frac{2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin P\cdot\sin P_a\cdot\sin P_b\cdot\sin P_c}} \tag{39}$$

由球面直角三角形 PAM_b 已証

$$\operatorname{tg}\rho_c=\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\cos\frac{A+C-B}{2}}$$

由球面半边公式(13)

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_B}{\cos P_A\cdot\cos P_C}}$$

而 $$\cos\frac{A+C-B}{2}=\cos P_B$$

故 $$\operatorname{tg}\rho_c=\frac{\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos P_B}{\cos P_A\cdot\cos P_C}}}{\cos P_B}$$

化簡之，得球面外接圓半徑公式

$$\operatorname{tg}\rho_c=\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos P_A\cdot\cos P_B\cdot\cos P_C}} \tag{40}$$

但 $P=90°+\frac{E}{2}$，$P_A=90°-\left(A-\frac{E}{2}\right)$，

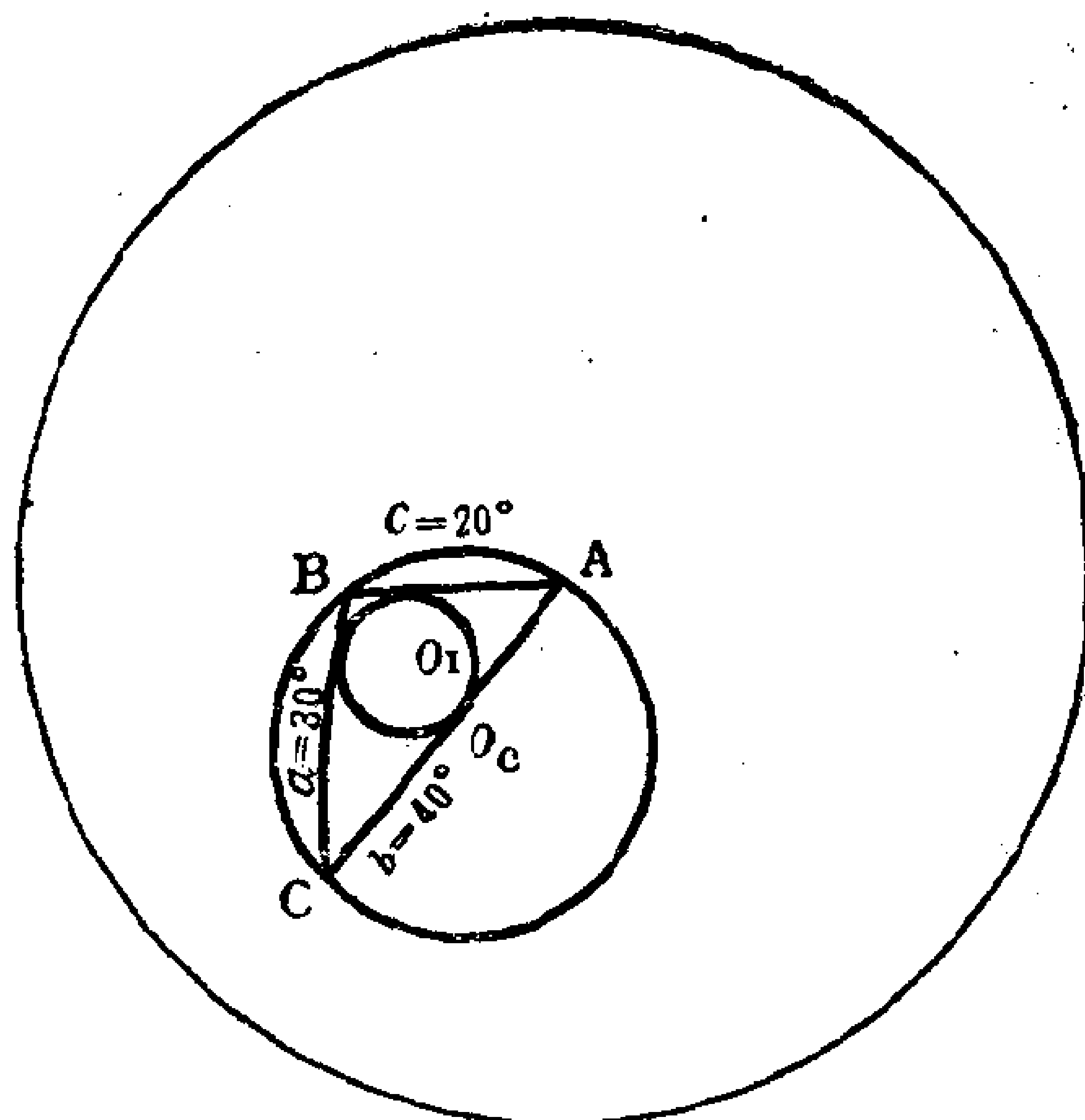
$P_B=90°-\left(B-\frac{E}{2}\right)$，$P_C=90°-\left(C-\frac{E}{2}\right)$

代入公式(40) 則球面外接圓半徑公式

$$\operatorname{tg}\rho_C=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}} \tag{41}$$

例題 30. 設球面三角形 ABC，$a=30°$，$b=40°$，$c=20°$；求該球面三角形的內切圓及外接圓的半徑。

解



（例題 30 附圖）

由球面內切圓半徑公式(36)

$$\operatorname{tg}\rho_I=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p}}$$

由球面外接圓半徑公式(39)

$$\operatorname{tg}\rho_c=\frac{2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p\cdot\sin p_a\cdot\sin p_b\cdot\sin p_c}}$$

可見球面外接圓半徑与球面內切圓的关系是

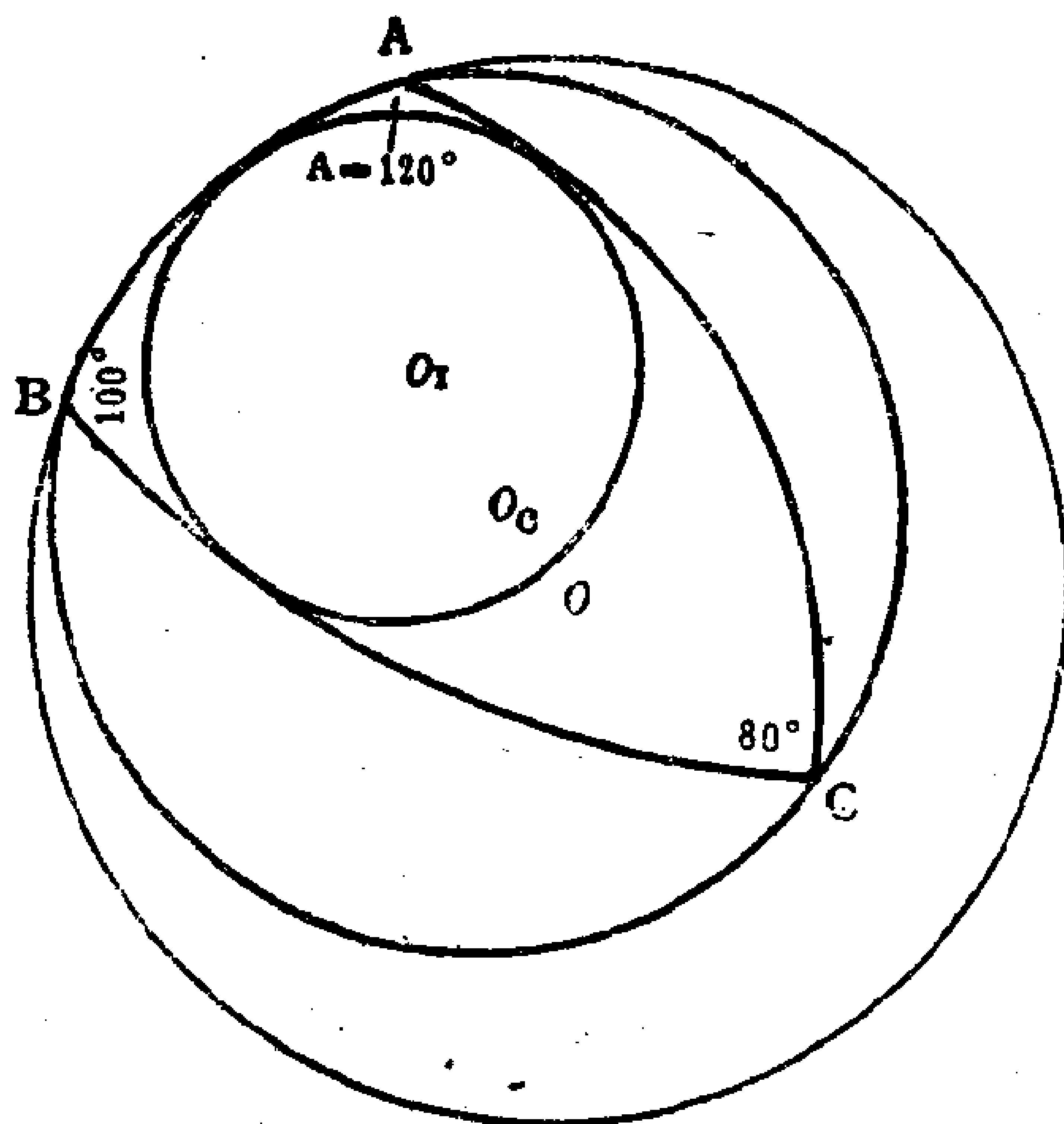
$$\operatorname{tg}\rho_c=2\cdot\sin\frac{a}{2}\ \sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}\cdot\csc p\cdot\operatorname{ctg}\rho_I$$

$a=30°$	$\frac{a}{2}=15°$			$L\sin$	9.41300
$b=40°$	$\frac{b}{2}=20°$			$L\sin$	9.53405
$c=20°$	$\frac{c}{2}=10°$			$L\sin$	9.23967
	$p=45°$	$L\csc$	0.15051	$L\csc$	0.15051
	$p_a=15°$	$L\sin$	9.41300		
	$p_b=5°$	$L\sin$	8.94030		
	$p_c=25°$	$L\sin$	9.62595		

	2	18.12976		
$\rho_I=6°37'.4$	Ltg	9.06488	Lctg	0.93512
			Log2	0.30103
$\rho_c=20°31'.7$			Ltg	9.57338

例題 31. 設球面三角形 ABC，$A=120°$，$B=100°$，$C=80°$；求該球面三角形的內切圓及外接圓的半徑。

解



(例題 31 附圖)

由球面內切圓半徑公式(38)

$$\operatorname{tg}\rho_I=\frac{\sqrt{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}{2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

由球面外接圓半徑公式(41)

$$\operatorname{tg}\rho_c=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$$

可見球面內切圓半徑与球面外接圓半徑的关系是

$$\operatorname{ctg}\rho_I=2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\csc\frac{E}{2}\cdot\operatorname{tg}\rho_c$$

$A=120^\circ$	$\frac{A}{2}=60^\circ$				$L\cos$	9.69897
$B=100^\circ$	$\frac{B}{2}=50^\circ$				$L\cos$	9.80807
$C=80^\circ$	$\frac{C}{2}=40^\circ$				$L\cos$	9.88425
$E=120^\circ$	$\frac{E}{2}=60^\circ$		$L\sin$	9.93753	$L\csc$	0.06247
	$A-\frac{E}{2}=60^\circ$		$L\csc$	0.06247		
	$B-\frac{E}{2}=40^\circ$		$L\csc$	0.19193		
	$C-\frac{E}{2}=20^\circ$		$L\csc$	0.46595		
			2	0.65788		
$\rho_c=64^\circ52'.8$			$L\text{tg}$	0.32894	$L\text{tg}$	0.32894
					$\log 2$	0.30103
$\rho_I=39^\circ30'.7$					$L\text{ctg}$	0.08373

第六章　球　面　曲　線

§12．球　面　座　标

12.1　球面座标系

球面上和平面一样，可以利用座标法来确定点的位置，建立曲綫的方程式，从而对这样的点或曲綫进行研究。

球面座标系有二类：

a)**球面極座标**，天文学中的**地平座标系**属于这一类；

b)**球面直角座标**，天文学中的**赤道座标系**，**黃道座标系**，以及航海学中的**地理座标系**等均属于这一类。

12.2　球面極座标

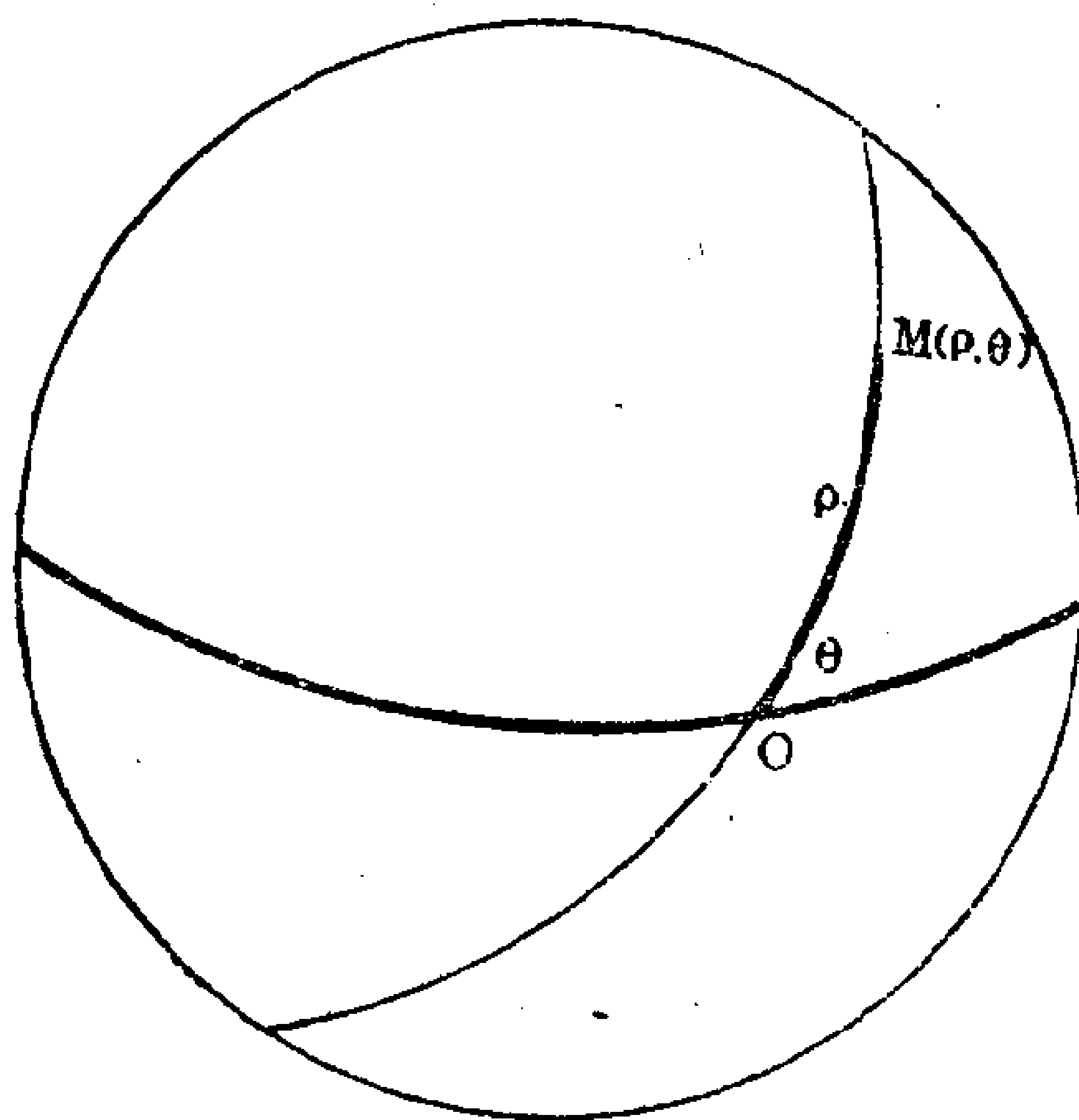


圖 25

球面極座标圖 25，是以球面上一个大圓作为座标的**基准大圓**，在基

准大圆上取一点O作为座标的原点。球面任意点M是用由原点到这个点的大圆距离ρ，以及这个大圆与基准大圆的交角θ，来确定它在球面上的位置。(ρ,θ)就叫作M点的**球面極座标**，通常写成$M(\rho,\theta)$。

12.3 球面直角座标

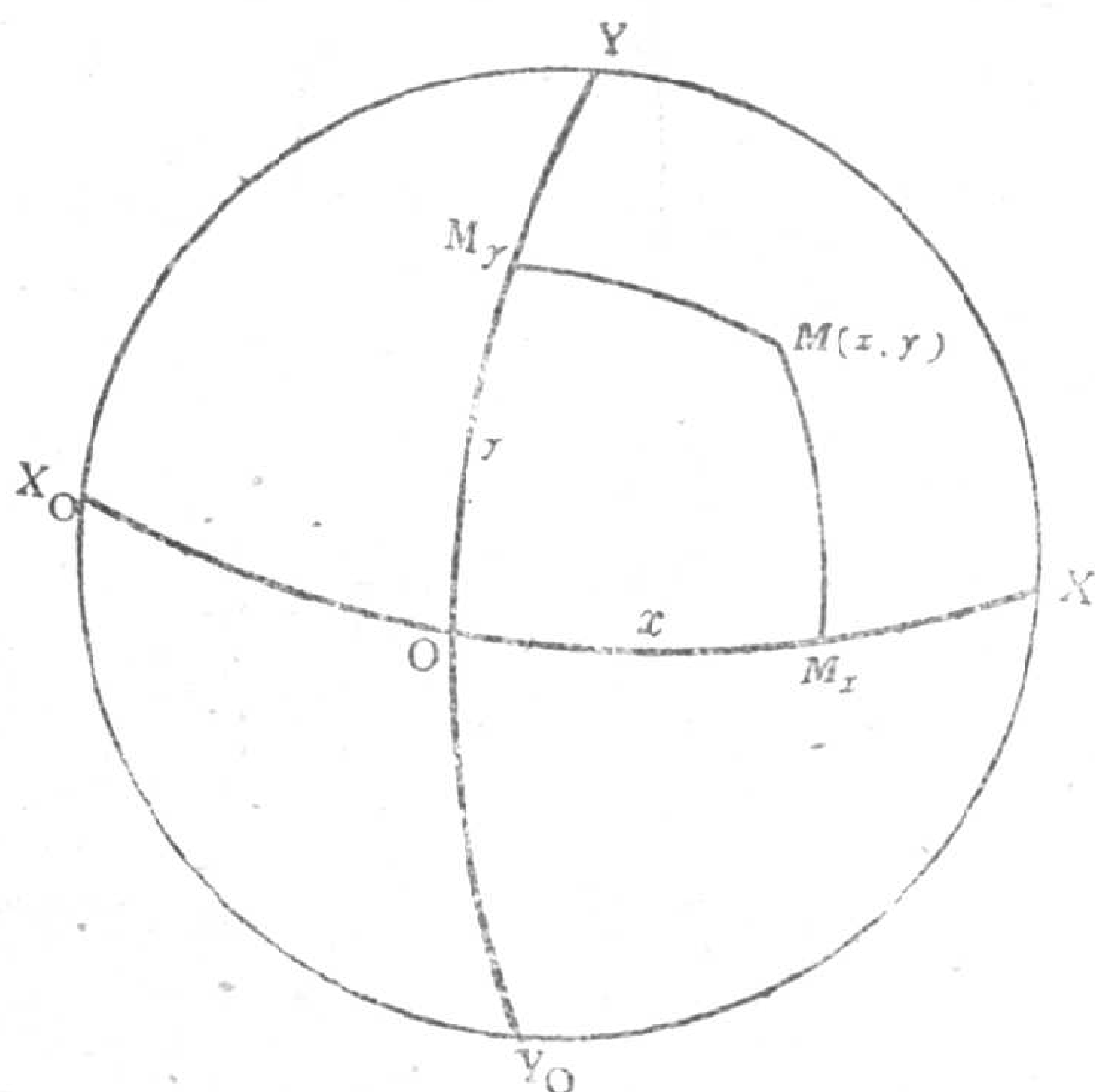


圖 26

球面直角座标圖 26，是以兩个互相交成直角的大圆作为座标的**基准大圆**，它的交点即为座标的**原点**。球面任意点的座标即是由該任意点所作的正交在基准大圆的大圆交点到原点的弧長。如圖 26 所示，大圆XOX_0及YOY_0为基准大圆，O为原点，M_x及M_y分别为由任意点M所作的正交在基准大圆XOX_0及YOY_0的交点。命OM_x为x，OM_y为y，于是xy为M点的球面直角座标，通常写成$M_{(xy)}$。

12.4 球面極座标与球面直角座标的关系

圖 27，大圆XOX_0及YOY_0为球面直角座标系的基准大圆，O为原点，于是对球面任意点M的座标有$\widehat{OM_x}=x$，$\widehat{OM_y}=y$。

設O同时亦为球面極座标的原点，而XOX_0为基准大圆，则对于M的球面極座标有$\widehat{OM}=\rho$，$M\hat{O}M_x=\theta$。

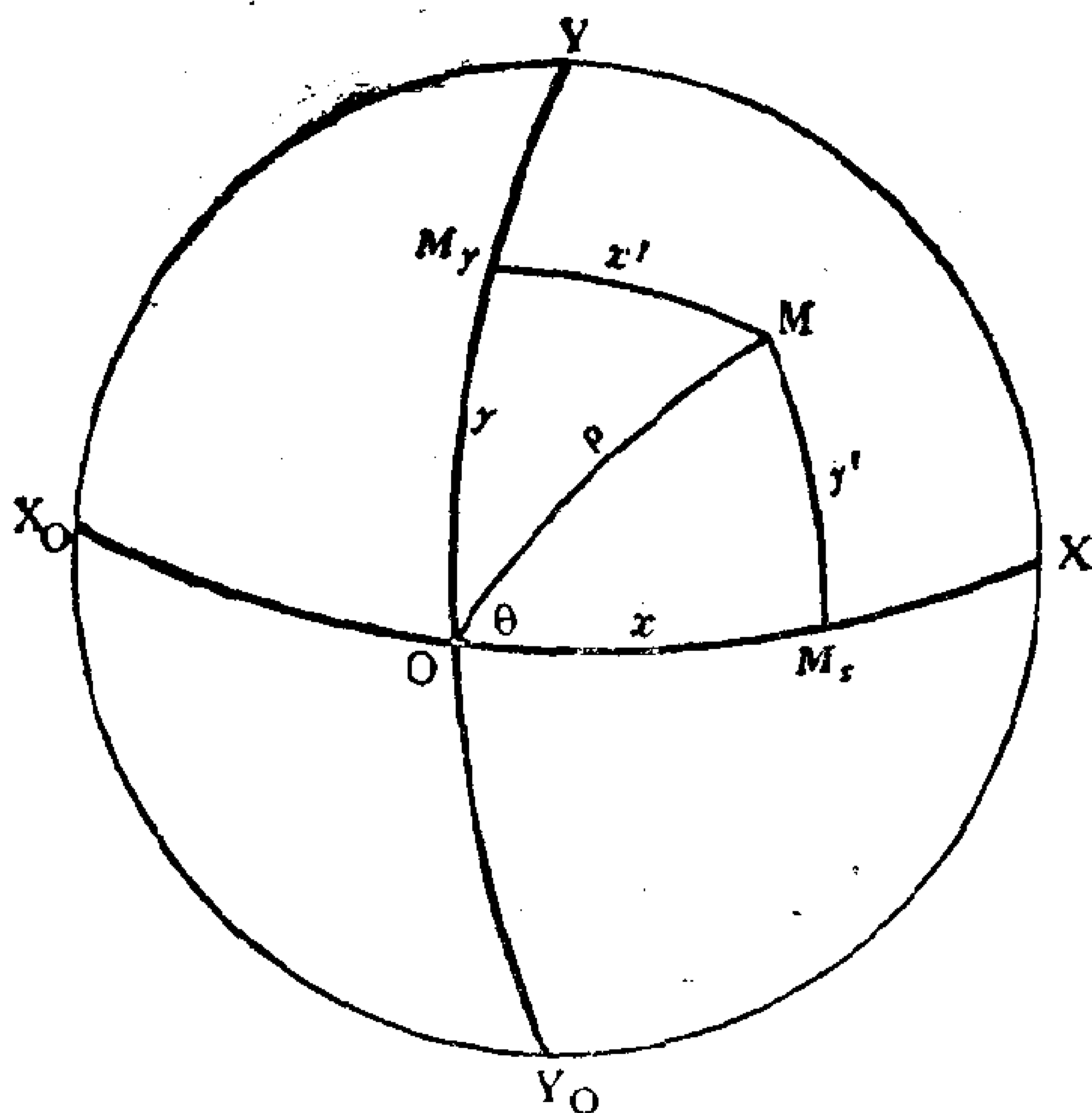


圖 27

由球面直角三角形 OM_xM 及 OM_yM，可以証得兩种座标系的关系为

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} x&=\operatorname{tg}\rho\cdot\cos\theta\\ \operatorname{tg} y&=\operatorname{tg}\rho\cdot\sin\theta\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

今以 $\overset{\frown}{MM_y}=x'$，$\overset{\frown}{MM_x}=y'$，称 $x'y'$ 为 M 点的**輔助座标**。今由球面直角三角形 OM_xM 及 OM_yM 得球面直角座标与其輔助座标的关系为：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} x'&=\operatorname{tg} x\cdot\cos y\\ \operatorname{tg} y'&=\operatorname{tg} y\cdot\cos x\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin x&=\sin x'\cdot\sec y'\\ \sin y&=\sin y'\cdot\sec x'\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

§13. 球面曲綫方程式

13.1 球面大圓曲綫方程式

設球面大圓 GG_0 交球面直角座标基准大圓 XOX_0 于 A，YOY_0 于 B，（圖 28）。

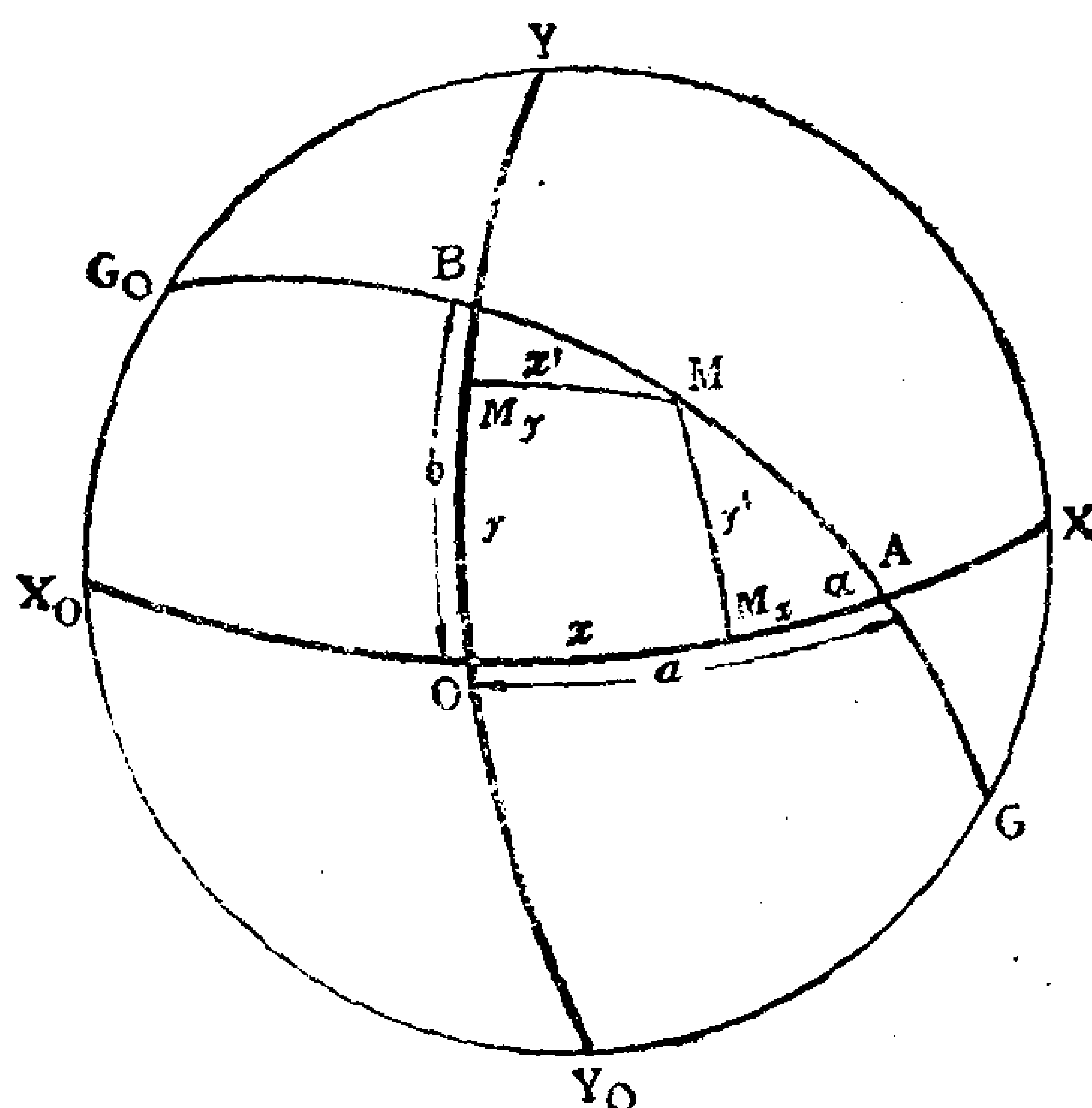


圖 28

命 $\overset{\frown}{OA}=a$, $\overset{\frown}{OB}=b$，大圓 GG_0 与 XOX_0 的交角为 α。由球面直角三角形 BOA 得

$$\operatorname{tg}\alpha=\sin a\cdot\operatorname{ctg}b$$

今在 $\overset{\frown}{AB}$ 取任意点 M，它的球面直角座标为 (x, y)，輔助座标为 (x', y')，于是在球面直角三角形 MM_xA 有

$$\sin(a-x)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}y'$$

但由公式(43) $\quad \operatorname{tg}y'=\operatorname{tg}y\cdot\cos x$

而 $\quad \operatorname{tg}\alpha=\sin a\cdot\operatorname{ctg}b$

所以 $\quad \sin(a-x)=\sin a\cdot\operatorname{ctg}b\cdot\operatorname{tg}y\cdot\cos x$

化簡上式得**球面大圓曲綫方程式**

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}+\frac{\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}b}=1 \qquad (45)$$

对于球面大圓 GG_0 弧上的 $M_1(x_1\cdot y_1)$ 及 $M_2(x_2\cdot y_2)$ 点，必然是适合公式(45)，因此

$$\frac{\operatorname{tg}x_1}{\operatorname{tg}a}+\frac{\operatorname{tg}y_1}{\operatorname{tg}b}=1 \qquad (45a)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} a}+\frac{\operatorname{tg} y_2}{\operatorname{tg} b}=1 \qquad (45b)$$

消去公式(45)(45a)及(45b)的 tg a 及 tg b 項，**則得經过球面兩任意已知点 $M_1(x_1 \cdot y_1)$，及 $M_2(x_2 \cdot y_2)$的球面大圓曲綫方程式**

$$\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1}=\frac{\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} y_1}{\operatorname{tg} y_2-\operatorname{tg} y_1} \qquad (46)$$

由球面大圓曲綫方程式(45)及(46)，可以看出，它和平面上的直綫方程式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$及$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$是很相似的。**只要在平面直綫方程式的各項前冠以正切函数，方程式就成为球面大圓曲綫方程式了。**記住这个关系是非常有用的，因为其它的球面曲綫方程式与其对应的平面曲綫方程式都存在有同样的关系，下面的內容將具体地証实这一点。

13.2 球面小圓曲綫方程式

設球面小圓的球面半徑为 r，球面直角座标的原点在小圓中心 O（圖29）。

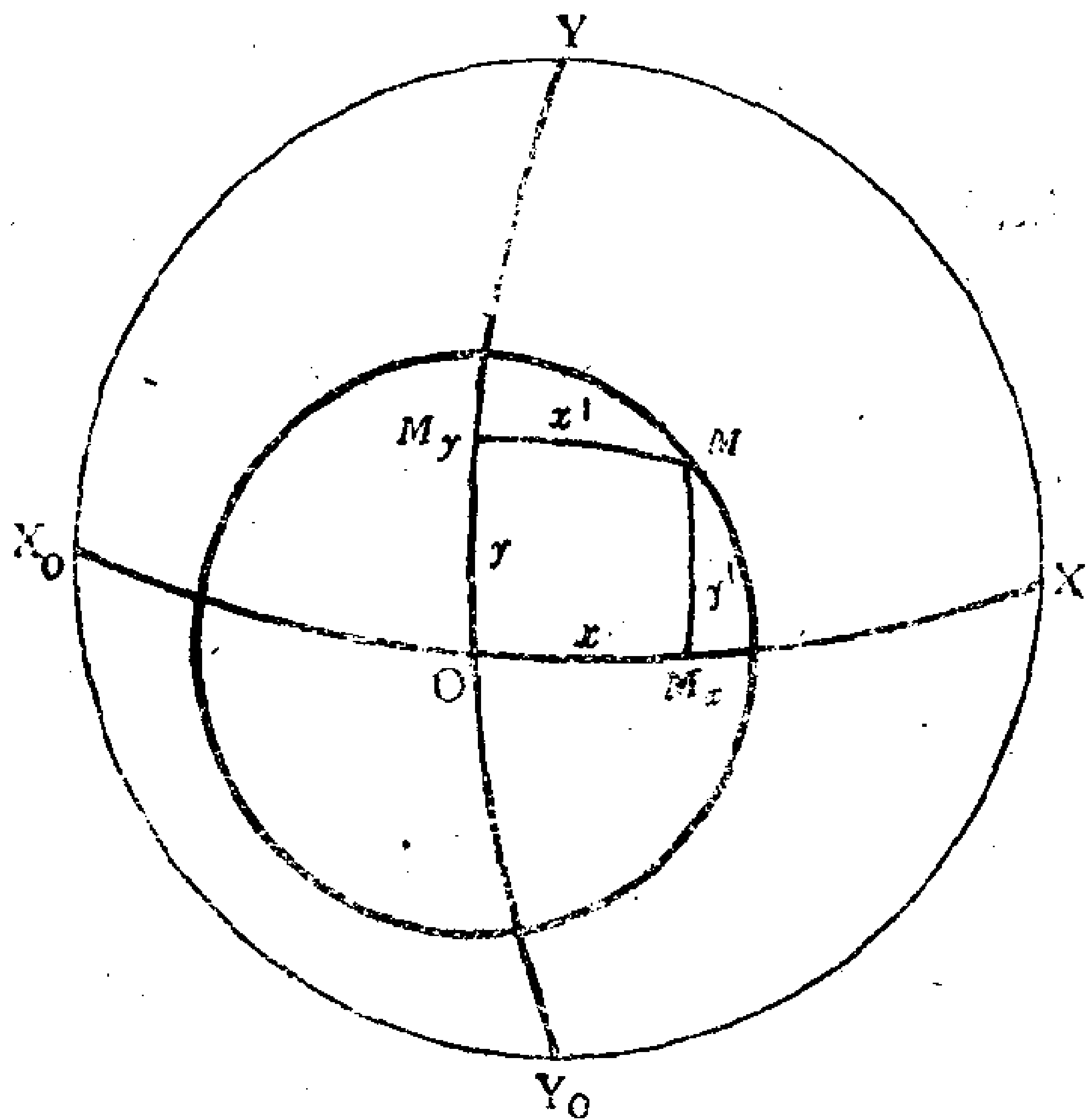


圖 29

自小圆的周取任意点 M，它的座标为$(x\cdot y)$，并命 $\widehat{MM_y}=x'$，$\widehat{MM_x}=y'$，$(x'\cdot y')$ 为 M 的輔助座标。

今由球面直角三角形 OM_xM 得

$$\cos r=\cos x\cdot\cos y'$$

即
$$\sec^2 r=\sec^2 x\cdot\sec^2 y'$$

或
$$(1+\mathrm{tg}^2 r)=(1+\mathrm{tg}^2 x)\cdot(1+\mathrm{tg}^2 y')$$

但由公式(43)
$$\mathrm{tg}\, y'=\mathrm{tg}\, y\cdot\cos x,$$

故
$$(1+\mathrm{tg}^2 r)=(1+\mathrm{tg}^2 x)\cdot(1+\mathrm{tg}^2 y\cdot\cos^2 x)$$

化簡之，得**球面小圓曲綫方程**式

$$\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^2 y=\mathrm{tg}^2 r \tag{47}$$

13.3 球面椭圓曲綫方程式

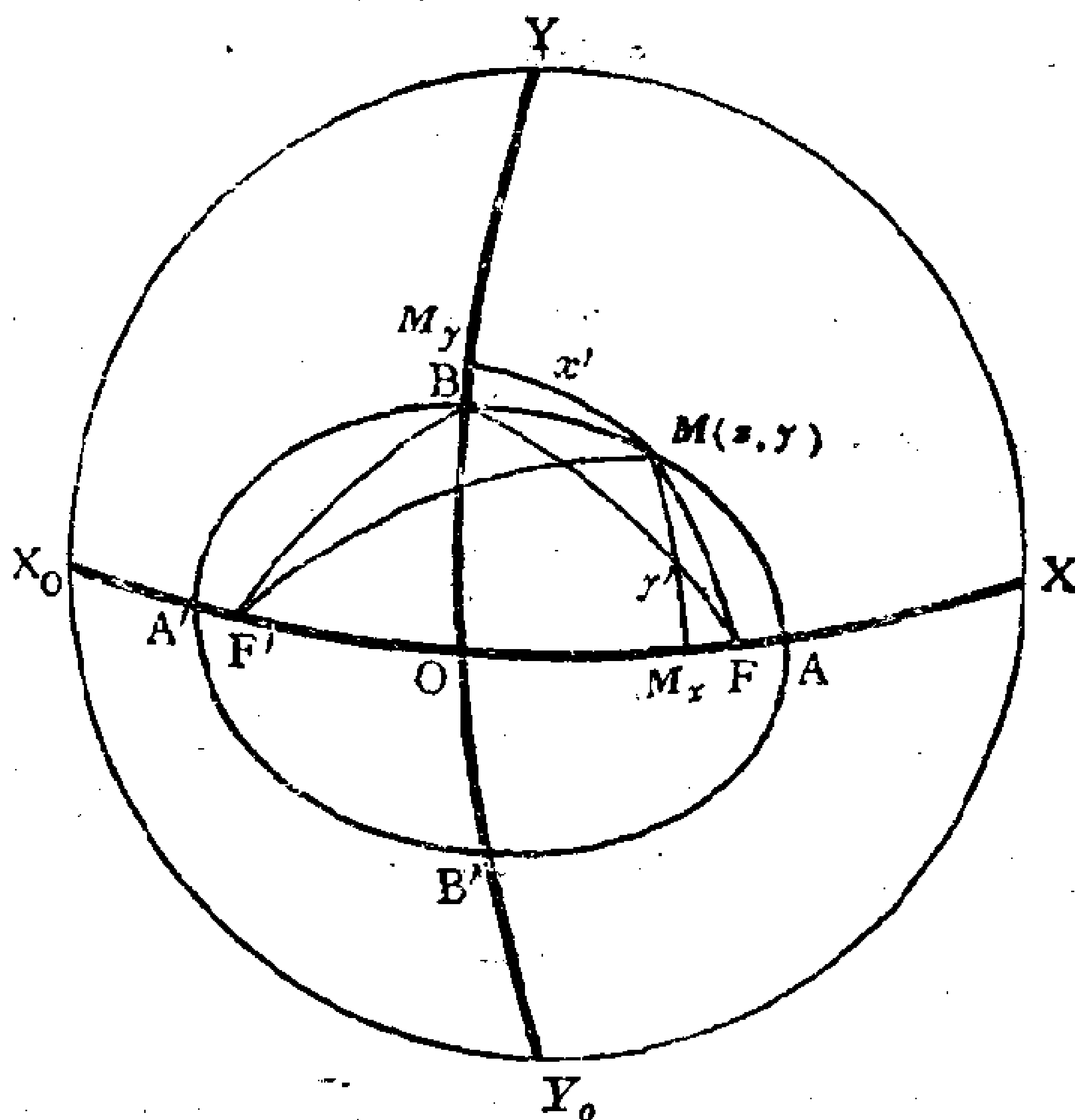


圖 30

設球面椭圓的中心在球面直角座标的原点O(圖 30)，球面長軸 $\widehat{AA'}$ 与 $\widehat{XX_0}$ 共球面大圓，$\widehat{AA'}=2a$；球面短軸 $\widehat{BB'}$ 与 $\widehat{YY_0}$共球面大圓，$\widehat{BB'}=2b$。F,F' 为椭圓的焦点，$\widehat{OF}=\widehat{OF'}=c$。

在椭圓的周取任意点 M，它的座标为 $(x\cdot y)$；并命 $\widehat{MM_y}=x'$，$\widehat{MM_x}$

$=y'$，$(x'、y')$为 M 的輔助座标。由任意点 M 到兩焦点 F、F' 的距离和，根据橢圓的性質，应为 $2a$，即 $\overset{\frown}{MF}+\overset{\frown}{MF'}=2a$。

今由球面直角三角形 FM_xM 及 $F'M_xM$ 得

$$\cos \overset{\frown}{MF}=\cos(x-c)\cdot\cos y'$$

$$\cos \overset{\frown}{MF'}=\cos(x+c)\cdot\cos y'$$

兩式相和并化簡之，得

$$\cos\frac{\overset{\frown}{MF}-\overset{\frown}{MF'}}{2}=\frac{\cos c}{\cos a}\cdot\cos x\cdot\cos y'$$

兩式相乘并化簡之，得

$$\cos(\overset{\frown}{MF}-\overset{\frown}{MF'})=2(\cos^2 x-\sin^2 c)\cdot\cos^2 y'-\cos 2a$$

但 $$\cos(\overset{\frown}{MF}-\overset{\frown}{MF'})=2\cdot\cos^2\frac{\overset{\frown}{MF}-\overset{\frown}{MF'}}{2}-1$$

所以

$$2(\cos^2 x-\sin^2 c)\cos^2 y'-\cos 2a=2\cdot\frac{\cos^2 c}{\cos^2 a}\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2 y'-1$$

但由球面直角三角形 BOF 得

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b}$$

即 $$\cos^2 c=\frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}\qquad \sin^2 c=1-\frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}$$

而由公式(43) $$\operatorname{tg} y'=\operatorname{tg} y\cdot\cos x$$

即 $$\operatorname{tg}^2 y'=\operatorname{tg}^2 y\cdot\cos^2 x$$

所以 $$2\left(\cos^2 x-1+\frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}\right)\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y\cdot\cos^2 x}-\cos 2a$$

$$=2\cdot\frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}\cdot\frac{\cos^2 x}{\cos^2 a}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y\cdot\cos^2 x}-1$$

化簡之，得球面橢圓曲綫方程式

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a}+\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b}=1 \qquad (48)$$

13.4 球面双曲綫方程式

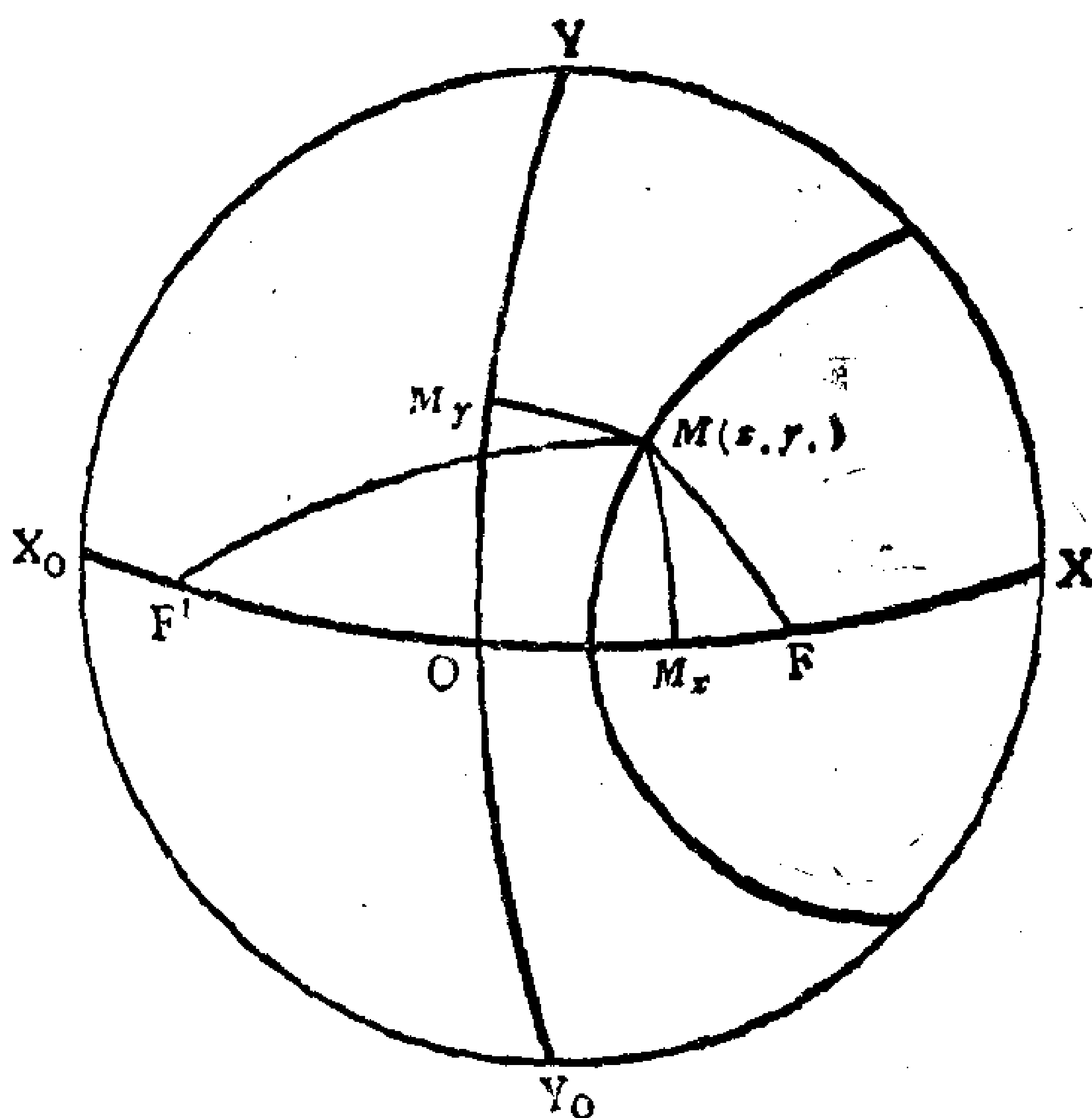


圖 31

設球面双曲綫的焦点 F 及 F' 位于球面直角座标基准大圓 XOX_0 上，O 为座标原点，$\overset{\frown}{OF}=\overset{\frown}{OF'}=C$（圖 31）。

在球面双曲綫上取任意点M，它的座标为$(x、y)$，輔助座标$x'=\overset{\frown}{MM_y}$，$y'=\overset{\frown}{MM_x}$。由任意点 M 到兩焦点的距离差，根据球面双曲綫的性質，应为 $2a$，即 $\overset{\frown}{MF'}-\overset{\frown}{MF}=2a$。

今由球面直角三角形 FM_xM 及 $F'M_xM$ 得

$$\cos\overset{\frown}{MF}=\cos(x-c)\cdot\cos y'$$

$$\cos\overset{\frown}{MF'}=\cos(x+c)\cdot\cos y'$$

兩式相和并化簡之，得

$$\cos\frac{\overset{\frown}{MF}+\overset{\frown}{MF'}}{2}=\frac{\cos c}{\cos a}\cdot\cos x\cdot\cos y'$$

兩式相乘并化簡之，得

$$\cos(\overset{\frown}{MF}+\overset{\frown}{MF'})=2(\cos^2 x-\sin^2 c)\cdot\cos^2 y'-\cos 2a$$

但 $$\cos(\widehat{MF}+\widehat{MF'})=2\cdot\cos^2\frac{\widehat{MF}+\widehat{MF'}}{2}-1$$

所以

$$2(\cos^2 x-\sin^2 c)\cdot\cos^2 y'-\cos 2a=2\cdot\frac{\cos^2 c}{\cos^2 a}\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2 y'-1$$

即 $$\left(1-\frac{\cos^2 c}{\cos^2 a}\right)\cdot\cos^2 x+\sin^2 a\cdot\operatorname{tg}^2 y'=\sin^2 c-\sin^2 a$$

由公式(43) $$\operatorname{tg} y'=\operatorname{tg} y\cdot\cos x$$

代入上式并化简之，得

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a}-\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\dfrac{\cos^2 a-\cos^2 c}{\cos^2 a}}=1$$

命 $$\frac{\cos^2 a-\cos^2 c}{\cos^2 a}=\operatorname{tg}^2 b$$

于是得球面双曲綫方程式

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a}-\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b}=1 \tag{49}$$

附　录

1. 球面三角公式彙編

公式名称	公式	编号
球面正弦公式	$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$	(1)
球面五联关系式	$\sin a\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A$	(2)
	$\sin a\cdot\cos C=\cos c\cdot\sin b-\sin c\cdot\cos b\cdot\cos A$	
	$\sin b\cdot\cos A=\cos a\cdot\sin c-\sin a\cdot\cos c\cdot\cos B$	
	$\sin b\cdot\cos C=\cos c\cdot\sin a-\sin c\cdot\cos a\cdot\cos B$	
	$\sin c\cdot\cos A=\cos a\cdot\sin b-\sin a\cdot\cos b\cdot\cos C$	
	$\sin c\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin a-\sin b\cdot\cos a\cdot\cos C$	
	$\sin A\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin C+\sin B\cdot\cos C\cdot\cos a$	(2a)
	$\sin A\cdot\cos c=\cos C\cdot\sin B+\sin C\cdot\cos B\cdot\cos a$	
	$\sin B\cdot\cos a=\cos A\cdot\sin C+\sin A\cdot\cos C\cdot\cos b$	
	$\sin B\cdot\cos c=\cos C\cdot\sin A+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos b$	
	$\sin C\cdot\cos a=\cos A\cdot\sin B+\sin A\cdot\cos B\cdot\cos c$	
	$\sin C\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin A+\sin B\cdot\cos A\cdot\cos c$	

續表

公式名称	公式	編号
球面余弦公式	$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$ $\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos B$ $\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C$	(3)
	$\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$ $\cos B=\dfrac{\cos b-\cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}$ $\cos C=\dfrac{\cos c-\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}$	(3a)
	$\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a$ $\cos B=-\cos A\cdot\cos C+\sin A\cdot\sin C\cdot\cos b$ $\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$	(3b)
	$\cos a=\dfrac{\cos A+\cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C}$ $\cos b=\dfrac{\cos B+\cos A\cdot\cos C}{\sin A\cdot\sin C}$ $\cos c=\dfrac{\cos C+\cos A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B}$	(3c)

續表

公式名称	公式	編号
球面四联关系式	$\mathrm{ctg}\, a \cdot \sin b = \mathrm{ctg}\, A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b$ $\mathrm{ctg}\, a \cdot \sin c = \mathrm{ctg}\, A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c$ $\mathrm{ctg}\, b \cdot \sin a = \mathrm{ctg}\, B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos a$ $\mathrm{ctg}\, b \cdot \sin c = \mathrm{ctg}\, B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c$ $\mathrm{ctg}\, c \cdot \sin a = \mathrm{ctg}\, C \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos a$ $\mathrm{ctg}\, c \cdot \sin b = \mathrm{ctg}\, C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b$	(4)
球面半正矢公式	$\mathrm{Hav}\, a = \mathrm{Hav}(b-c) + \sin b \cdot \sin c \cdot \mathrm{Hav}\, A$ $\mathrm{Hav}\, b = \mathrm{Hav}(a-c) + \sin a \cdot \sin c \cdot \mathrm{Hav}\, B$ $\mathrm{Hav}\, c = \mathrm{Hav}(a-b) + \sin a \cdot \sin b \cdot \mathrm{Hav}\, C$	(5)
	$\mathrm{Hav}\, A = \csc b \cdot \csc c + \sqrt{\mathrm{Hav}(a+b-c) \cdot \mathrm{Hav}(a-b-c)}$ $\mathrm{Hav}\, B = \csc a \cdot \csc c + \sqrt{\mathrm{Hav}(b+a-c) \cdot \mathrm{Hav}(b-a-c)}$ $\mathrm{Hav}\, C = \csc a \cdot \csc b + \sqrt{\mathrm{Hav}(c+a-b) \cdot \mathrm{Hav}(c-a-b)}$	(7)
球面半正矢补角公式	$\mathrm{Shav}\, a = \mathrm{Shav}\, A \cdot \mathrm{Shav}(b-c) + \mathrm{Shav}(180^\circ - A) \cdot \mathrm{Shav}(b+c)$ $\mathrm{Shav}\, b = \mathrm{Shav}\, B \cdot \mathrm{Shav}(a-c) + \mathrm{Shav}(180^\circ - B) \cdot \mathrm{Shav}(a+c)$ $\mathrm{Shav}\, c = \mathrm{Shav}\, C \cdot \mathrm{Shav}(a-b) + \mathrm{Shav}(180^\circ - C) \cdot \mathrm{Shav}(a+b)$	(6)

續表

公 式 名 称	公 式	編 号
球面半角正弦公式	$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin b\cdot\sin c}}$ $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin a\cdot\sin c}}$ $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b}{\sin a\cdot\sin b}}$	(8)
球面半角余弦公式	$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_a}{\sin b\cdot\sin c}}$ $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_b}{\sin a\cdot\sin c}}$ $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_c}{\sin a\cdot\sin b}}$	(9)
球面半角正切公式	$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_a}}$ $tg\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin p\cdot\sin p_b}}$ $tg\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b}{\sin p\cdot\mathrm{siu}\, p_c}}$	(10)

續表

公式名称	公式	編号
球面半边正弦公式	$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cdot\cos P_A}{\sin B\cdot\sin C}}$ $\sin\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cdot\cos P_B}{\sin A\cdot\sin C}}$ $\sin\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cdot\cos P_C}{\sin A\cdot\sin B}}$	(11)
	$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}}$ $\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin C}}$ $\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin B}}$	(14)
球面半边余弦公式	$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos P_B\cdot\cos P_C}{\sin B\cdot\sin C}}$ $\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos P_A\cdot\cos P_C}{\sin A\cdot\sin C}}$	(12)

續表

公式名称	公式	編号
	$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos P_A\cdot\cos P_B}{\sin A\cdot\sin B}}$	
	$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\cdot\sin C}}$ $\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin C}}$ $\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin B}}$	(15)
球面半边正切公式	$\mathrm{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cdot\cos P_A}{\cos P_B\cdot\cos P_C}}$ $\mathrm{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cdot\cos P_B}{\cos P_A\cdot\cos P_C}}$ $\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cdot\cos P_C}{\cos P_A\cdot\cos P_B}}$	(13)

續表

公式名称	公式	編号
	$\mathrm{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$ $\mathrm{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$ $\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}}$	(16)
德朗布尔方程式	$\cos\frac{1}{2}(A-B)=\sin\frac{1}{2}(a+b)\cdot\csc\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$ $\cos\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\sec\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$ $\sin\frac{1}{2}(A-B)=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cdot\csc\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$ $\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sec\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$	(17)

續表

公 式 名 称	公 式	编 号
訥比尔相似方程式	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cdot\csc\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sec\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\sin\frac{1}{2}(A-B)\cdot\csc\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\cos\frac{1}{2}(A-B)\cdot\sec\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}$	(18)
球面直角三角形公式 ($C=90^\circ$)	$\sin a=\sin A\cdot\sin c$ $\sin a=\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{tg}b$ $\sin b=\sin B\cdot\sin c$ $\sin b=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{tg}a$ $\cos c=\cos a\cdot\cos b$ $\cos c=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B$	

续表

公式名称	公式	编号
球面直边三角形公式 ($c=90°$)	$\cos A=\sin B\cdot\cos a$	
	$\cos A=\operatorname{tg} b\cdot\operatorname{ctg} c$	
	$\cos B=\sin A\cdot\cos b$	
	$\cos B=\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{ctg} c$	
	$\cos a\cdot\sin b=\sin c\cdot\cos A$	
	$\cos b\cdot\cos A=\sin B\cdot\cos c$	
	$\sin A\cdot\cos c=\cos a\cdot\cos B$	
	$\sin c\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin a$	
	$\sin B\cdot\sin a=\sin A\cdot\sin b$	
	$\sin A=\sin a\cdot\sin C$	
	$\sin A=\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{tg} B$	
	$\sin B=\sin b\cdot\sin C$	
	$\sin B=\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{tg} A$	
	$\cos C=-\cos A\cdot\cos B$	
	$\cos C=-\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} b$	
	$\cos a=\sin b\cdot\cos A$	
	$\cos a=-\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{ctg} C$	

续表

公式名称	公式	编号
	$\cos b=\sin a\cdot\cos B$	
	$\cos b=-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{ctg}C$	
	$\cos A\cdot\sin B=\sin C\cdot\cos a$	
	$\cos B\cdot\cos a=-\sin b\cdot\cos C$	
	$\sin a\cdot\cos C=-\cos A\cdot\cos b$	
	$\sin C\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin A$	
	$\sin b\cdot\sin A=\sin a\cdot\sin B$	
小的球面初等三角形：正弦公式	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$	(19)
余弦公式	$a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos A$	
	$b^2=a^2+c^2-2a\cdot c\cdot\cos B$	(20)
	$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos C$	
五联关系式	$a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$	
	$b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos A$	(21)
	$c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$	
窄的球面初等三角形	$(c-b)_1=a\cdot\cos B$	(22a)
$(a\to 0,\ A\to 0)$	$(c-b)_2=(c-b)_1-\frac{a^2}{2}\cdot\sin^2 B\cdot\operatorname{ctg}c$	(22b)

續表

公式名称	公式	编号
	$A_1 = a \cdot \sin B \cdot \csc c$	(24a)
	$A_2 = A_1 + \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 2B \cdot \mathrm{ctg}\, c \cdot \csc c$	(24b)
	$(C_\Pi - B)_1 = A \cdot \cos o$	(25a)
	$(C_\Pi - B)_2 = (C_\Pi - B)_1 + \frac{A^2}{2} \cdot \sin^2 c \cdot \mathrm{ctg}^2 B$	(25b)
球面三角微分关系式	$\mathrm{ctg}\, a \cdot da - \mathrm{ctg}\, A \cdot d\, A = \mathrm{ctg}\, b \cdot db - \mathrm{ctg}\, B \cdot dB = \mathrm{ctg}\, c \cdot d\, c - \mathrm{ctg}\, C \cdot dC$	(27)
	$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA$ (或 $+\sin c \cdot \sin B \cdot dA$) $db = \cos A \cdot dc + \cos C \cdot da + \sin c \cdot \sin A \cdot dB$ (或 $+\sin a \cdot \sin C \cdot dB$) $dc = \cos B \cdot da + \cos A \cdot db + \sin a \cdot \sin B \cdot dC$ (或 $+\sin b \cdot \sin A \cdot dC$)	(28)
	$dA = \sin b \cdot \sin C \cdot da - (\cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC)$ $dA = \sin c \cdot \sin B \cdot da - (\cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC)$ $dB = \sin c \cdot \sin A \cdot db - (\cos a \cdot dC + \cos d \cdot dA)$ $dB = \sin a \cdot \sin C \cdot db - (\cos a \cdot dC + \cos d \cdot dA)$ $dC = \sin a \cdot \sin B \cdot dc - (\cos b \cdot dA + \cos a \cdot dB)$ $dC = \sin b \cdot \sin A \cdot dc - (\cos b \cdot dA + \cos a \cdot dB)$	(29)

續表

公式名称	公式	編号
	$\sin B\cdot da=\sin A\cdot\cos c\cdot db+\sin a\cdot\cos B\cdot dC+\sin c\cdot dA$ $\sin C\cdot da=\sin A\cdot\cos b\cdot dc+\sin a\cdot\cos C\cdot dB+\sin b\cdot dA$ $\sin C\cdot db=\sin B\cdot\cos a\cdot dc+\sin b\cdot\cos C\cdot dA+\sin a\cdot dB$ $\sin A\cdot db=\sin B\cdot\cos c\cdot da+\sin b\cdot\cos A\cdot dC+\sin c\cdot dB$ $\sin A\cdot dc=\sin C\cdot\cos b\cdot da+\sin c\cdot\cos A\cdot dB+\sin b\cdot dC$ $\sin B\cdot dc=\sin C\cdot\cos a\cdot db+\sin c\cdot\cos B\cdot dA+\sin a\cdot dC$	(30)
球面角盈公式	$E=A+B+C-180^\circ$	(31)
加諾里球面角盈公式	$\sin\frac{E}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin p_a\cdot\sin p_b\cdot\sin p_c}{\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}}}$	(32)
留里尔球面角盈公式	$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{p_a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{p_b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{p_c}{2}}$	(33)

續表

公式名称	公式	編号
尤勒球面角盈公式	$\cos\frac{E}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}}$	(34)
球面三角形面积公式	$S_{ABC}=\frac{\Pi R^2}{180^\circ}\cdot E$	(35)
球面內切圓半徑公式	$\operatorname{tg}\rho_I=\sqrt{\frac{\sin p_a\cdot\sin p_b\cdot\sin p_c}{\sin p}}$	(36)
	$\operatorname{tg}\rho_I=\frac{\sqrt{-\cos P\cdot\cos P_A\cdot\cos P_B\cdot\cos P_C}}{2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$	(37)
	$\operatorname{tg}\rho_I=\frac{\sqrt{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}{2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$	(38)

續表

公式名称	公式	編号
球面外接圓半徑公式	$\operatorname{tg}\rho_C=\dfrac{2\cdot\sin\dfrac{a}{2}\cdot\sin\dfrac{b}{2}\cdot\sin\dfrac{c}{2}}{\sqrt{\sin p\cdot\sin p_a\cdot\sin p_b\cdot\sin p_c}}$	(39)
	$\operatorname{tg}\rho_C=\sqrt{-\dfrac{\cos P}{\cos P_A\cdot\cos P_B\cdot\cos P_C}}$	(40)
	$\operatorname{tg}\rho_C=\sqrt{\dfrac{\sin\dfrac{E}{2}}{\sin\left(A-\dfrac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(B-\dfrac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\dfrac{E}{2}\right)}}$	(41)
球面座标系的关系	$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\rho\cdot\cos\theta\\ \operatorname{tg}y=\operatorname{tg}\rho\cdot\sin\theta\end{array}\right\}$	(42)

續表

公式名称	公式	編号
球面大圓曲綫方程式	$\operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} x \cdot \cos y$ $\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y \cdot \cos x$	(43)
	$\sin x = \sin x' \cdot \sec y'$ $\sin y = \sin y' \cdot \sec x'$	(44)
	$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} b} = 1$	(46)
	$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1} = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y_1}{\operatorname{tg} y_2 - \operatorname{tg} y_1}$	(46)
球面小圓曲綫方程式	$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 1$	(47)
球面椭圓曲綫方程式	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b} = 1$	(48)
球面双曲綫方程式	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} - \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b} = 1$	(49)

2. 平面三角公式汇编

公式名称	公式
三角函数基本恒等式	$\left.\begin{array}{l}\sin^2x+\cos^2x=1\\ \sec^2x=\mathrm{tg}^2x+1\\ \csc^2x=\mathrm{ctg}^2x+1\end{array}\right]$
三角函数的加法定理：	
正弦的加法定理	$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$
	$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$
余弦的加法定理	$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$
	$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$
正切的加法定理	$\mathrm{tg}(x+y)=\dfrac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}$
	$\mathrm{tg}(x-y)=\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}$
余切的加法定理	$\mathrm{ctg}(x+y)=\dfrac{\mathrm{ctg}x\cdot\mathrm{ctg}y-1}{\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y}$
	$\mathrm{ctg}(x-y)=\dfrac{\mathrm{ctg}x\cdot\mathrm{ctg}y+1}{\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}y}$
正弦加法一般公式	$\sin\sum_{i=1}^{n}x_i=\sin(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\cos x_1\cdot\cos x_2\cdots\cdots$

公 式 名 称	公 式
	$\cos x_n\cdot[P_1-P_3+P_5-\cdots\cdots]$ $P_1=\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2+\cdots\cdots\mathrm{tg}x_n$ $P_2=\mathrm{tg}x_1\cdot\mathrm{tg}x_2+\mathrm{tg}x_2\cdot\mathrm{tg}x_3+\cdots\cdots\mathrm{tg}x_{n-1}\cdot\mathrm{tg}x_n$ $P_k=\mathrm{tg}x_1\cdot\mathrm{tg}x_2\cdots\cdots\mathrm{tg}x_k+\mathrm{tg}x_2\cdot\mathrm{tg}x_3\cdots\cdots\mathrm{tg}x_{k+1}+\cdots\cdots$
余弦加法一般公式	$\cos\sum_{i=1}^{n}x_i=\cos(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\cos x_1\cdot\cos x_2\cdots\cdots\cos x_n\cdot$ $\cdot[1-P_2+P_4-\cdots\cdots]$
倍弧的三角函数公式:	$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ $\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$
倍弧三角函数一般公式	$\sin nx=C_n^1\sin x\cdot\cos^{n-1}x-C_n^3\cdot\sin^3 x\cdot\cos^{n-3}x+C_n^5\sin x^5\cdot\cos^{n-5}x-\cdots\cdots$ $\cos nx=\cos^n x-C_n^2\sin^2 x\cdot\cos^{n-2}x+C_n^4\sin^4 x\cdot\cos^{n-4}x-\cdots\cdots$ $\cos nx+i\cdot\sin nx=(\cos x+i\cdot\sin x)^n$
分自变量三角函数公式	$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

续表

公式名称	公式
	$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
	$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
三角函数积化为和公式	$\sin x\cdot\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
	$\sin x\cdot\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$
	$\cos x\cdot\sin y=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$
	$\cos x\cdot\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$
三角函数和化为积公式	$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$
	$\sin x-\sin y=2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$
	$\cos x+\cos y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

续表

公式名称	公式
	$\cos x-\cos y=-2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$
	$\mathrm{tg}x\pm\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y}$
	$\mathrm{ctg}x\pm\mathrm{ctg}y=\pm\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x\cdot\sin y}$
三角函数代换式	$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$
	$\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$
反三角函数公式	$\sin\cdot\sin^{-1}x=x$
	$\sin\cdot\cos^{-1}x=\sqrt{1-x^2}$
	$\sin\cdot\mathrm{tg}^{-1}x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

续表

公式名称	公式
	$\sin\cdot\mathrm{ctg}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\cos\cdot\sin^{-1}x=\sqrt{1-x^2}$ $\cos\cdot\cos^{-1}x=x$ $\cos\cdot\mathrm{tg}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\cos\cdot\mathrm{ctg}^{-1}x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\mathrm{tg}\cdot\sin^{-1}x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\mathrm{tg}\cdot\cos^{-1}x=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\mathrm{tg}\cdot\mathrm{tg}^{-1}x=x$ $\mathrm{tg}\cdot\mathrm{ctg}^{-1}x=\frac{1}{x}$ $\mathrm{ctg}\cdot\sin^{-1}x=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\mathrm{ctg}\cdot\cos^{-1}x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

公 式 名 称	公 式
	$\mathrm{ctg}\cdot\mathrm{tg}^{-1}x=\frac{1}{x}$
	$\mathrm{ctg}\cdot\mathrm{ctg}^{-1}x=x$
	$\sin(n\cdot\sin^{-1}x)=C_n^1(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}x-C_n^2(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}x^3+\cdots\cdots$
	$\cos(n\cdot\cos^{-1}x)=x^n-C_n^2(1-x^2)x^{n-2}+C_n^4(1-x^2)x^{n-4}-\cdots\cdots$
	$\mathrm{tg}(n\mathrm{tg}^{-1}x)=\frac{C_n^1x-C_n^3x^3+\cdots\cdots}{1-C_n^2x^2+C_n^4x^4-\cdots\cdots}$
平面三角正弦公式	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
平面三角五联关系式	$a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$
	$b=c\cdot\cos A+a\cdot\cos C$
	$c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$
平面三角余弦公式	$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$
	$b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos B$
	$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

續表

公式名称	公式
平面三角正切公式	$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(A+B)}$
	$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B+C)}$
	$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(C-A)}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(C+A)}$
毛利維介(Мольвейде)公式	$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{C}{2}}$
	$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{C}{2}}$
平面半角正弦公式	$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{P_b \cdot P_c}{b \cdot c}}$
	$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{P_a \cdot P_c}{a \cdot c}}$
	$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{P_a \cdot P_b}{a \cdot b}}$

续表

公式名称	公式
平面半角余弦公式	$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{P\cdot P_a}{b\cdot c}}$
	$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{P\cdot P_b}{a\cdot c}}$
	$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{P\cdot P_c}{a\cdot b}}$
平面半角正切公式	$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{P_b\cdot P_c}{P\cdot P_a}}$
	$\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{P_a\cdot P_c}{P\cdot P_b}}$
	$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{P_a P_b}{P\cdot P_c}}$
平面三角形面积公式	$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$
	$=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$
	$=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B$
	$=\sqrt{P\cdot P_a\cdot P_b\cdot P_c}$
平面内切圆半径公式	$r_I=\sqrt{\frac{P_a\cdot P_b\cdot P_c}{P}}$

續表

公 式 名 称	公 式
平面傍切圓半徑公式	$r_a=\frac{P}{P_a}\cdot r_I$ $=P\cdot tg\frac{A}{2}$ $r_b=\frac{P}{P_b}\cdot r_I$ $=P\cdot tg\frac{B}{2}$ $r_c=\frac{P}{P_c}\cdot r_I$ $=P\cdot tg\frac{C}{2}$
平面外接圓半徑公式	$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝航用球面三角学
作者＝陈喜震编著
页数＝１３８
ＳＳ号＝１１１３８９８８
出版日期＝１９５８年０８月第１版